TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 183, September 1973

SOMMES DE CESÀRO ET MULTIPLICATEURS DES DÉVELOPPEMENTS EN HARMONIQUES SPHÉRIQUES

PAR

ALINE BONAMI ET JEAN-LOUIS CLERC

ABSTRACT. Nous établissons une inégalité entre les sommes de Cesàro et la fonction maximale associées à une fonction définie sur la sphère, et nous en déduisons divers résultats de convergence en norme L^p, convergence presque partout, localisation des développements en harmoniques sphériques, ainsi qu'un théorème de multiplicateurs qui généralise le théorème classique de Marcinkiewicz sur les séries trigonométriques. La même étude est faite pour les développements suivant les polynômes ultrasphériques. Nous montrons de plus que les sommes partielles du développement en harmoniques sphériques d'une fonction de $L^p(\Sigma_n)$, $p \neq 2$, ne convergent pas forcément en norme.

Le théorème classique des multiplicateurs de Marcinkiewicz s'énonce (voir [16]):

Théorème (A). *Soit* $(\mu_k)_{k\geq 0}$ *une suite de nombres complexes, telle que*
(A_0) $|\mu_k| \leq A$;
(A_1) $\sup_j \Sigma_{2^j}^{2^{j+1}} |\mu_{k+1} - \mu_k| \leq A$.
Alors $\|\Sigma_0^{+\infty} \mu_k(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)\|_p \leq A_p \|\Sigma_0^{+\infty}(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)\|_p$, $1 < p < \infty$.

Le but de ce travail est de généraliser ce résultat aux développements en harmoniques sphériques. Plus précisément, si $f = \Sigma_0^{+\infty} H_k f$ est la décomposition en harmoniques sphériques d'une fonction f sur la sphère Σ_n, on cherche des conditions suffisantes (de type analogue à celles du Théorème (A)(1)) sur la suite $(\mu_k)_{k\geq 0}$ pour que l'application linéaire M définie par $Mf = \Sigma_0^{+\infty} \mu_k H_k f$ soit continue de L^p dans L^p $(1 < p < +\infty)$.

La démonstration de (A) utilise un certain nombre d'outils, et principalement les deux théorèmes suivants ($S_N f$ désignant la Nième somme partielle, et P_r $(0 \leq r < 1)$ le noyau de Poisson):

Received by the editors July 19, 1972.

AMS (MOS) subject classifications (1970). Primary 43A85, 43A55, 43A22; Secondary 40G05, 42A56.

Key words and phrases. Spherical harmonics, Cesàro means, summability, localization, L^p multipliers, ultraspherical polynomials.

(1) R. Coifman et G. Weiss ont obtenu dans [5] des conditions suffisantes "de type Hörmander". Nos résultats sont indépendants des leurs et strictement plus forts dans ce cas.

Théorème (B) (fonction g de Littelwood-Paley). *Il existe, pour* $1 < p < +\infty$, *une constante* A_p, *telle que*

(i) $\|g(f)\|_p = \|(\int_0^1 (1-r)|\partial P_r/\partial r * f|^2\, dr)^{1/2}\|_p \leq A_p \|f\|_p$;

(ii) $\|f\|_p \leq A_p \|g(f)\|_p$ *si* $\int_T f(x)\,dx = 0$.

Théorème (C) (inégalité de Zygmund). *Il existe, pour* $1 < p < +\infty$, *une constante* A_p, *telle que, pour toute suite d'entiers,* $n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots$ *et toute suite de fonctions* $f_1, f_2, \cdots, f_k, \cdots$

$$\left\| \left(\sum_0^{+\infty} |S_{n_k} f_k(x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq A_p \left\| \left(\sum_0^{+\infty} |f_k(x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p .$$

Une généralisation très complète de (B) a été obtenue par Stein [19]; il montre que si $(T^t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de diffusion symétrique sur un espace de mesure $\mathfrak{M}$, id est

(i) $T^{t+s} = T^t \circ T^s$, $T^0 = \mathrm{Id}$,

(ii) $\|T^t f\|_p \leq \|f\|_p$ pour $1 \leq p \leq +\infty$, et $T^t f \longrightarrow f$ dans $L^2(\mathfrak{M})$ quand $t \longrightarrow 0$,

(iii) T^t est un opérateur auto-adjoint sur $L^2(\mathfrak{M})$,

(iv) $f \geq 0 \Rightarrow T^t f \geq 0$,

(v) $T^t 1 = 1$,

alors la fonction g définie par $g(f)(x) = (\int_0^{+\infty} t|(\partial/\partial t)T^t f(x)|^2\, dt)^{1/2}$ satisfait l'analogue du Théorème (B). Stein en déduit d'ailleurs un théorème de multiplicateurs, qui, dans un cadre aussi général, est le meilleur auquel on puisse s'attendre. Dans le cas des variétés riemanniennes compactes, le semi-groupe de la chaleur, dont le générateur infinitésimal est l'opérateur de Laplace-Beltrami satisfait les conditions (i) à (v). On obtient donc un théorème de multiplicateurs, mais il réclame des conditions sur une infinité de différences. Stein pose le problème d'une généralisation plus satisfaisante de (A) dans ce cas.

Un substitut de l'inégalité (C) est fourni par le résultat suivant, cas particulier d'un résultat de Fefferman et Stein (2).

Théorème (D). *Soit* $(\mathfrak{M}, d)$ *un espace métrique, muni d'une mesure* μ *satisfaisant* $\mu(B(x, r)) \leq C \cdot \mu(B(x, r/2))$. *On note* Mf *la fonction maximale de Hardy-Littlewood*

$$Mf(x) = \sup_{r>0} (1/\mu(B(x, r))) \int_{B(x,r)} |f(y)|\, d\mu(y).$$

Il existe alors, pour $1 < p < \infty$, *une constante* A_p, *telle que pour toute suite* $f_1, f_2, \cdots, f_k, \cdots$

(2) Le résultat est démontré pour $\mathbf{R}^n$ dans [8]; il se généralise facilement aux "espaces de nature homogène" (pour cette notion voir [5, Chapitre III]).

$$\left\|\left(\sum_0^{+\infty}|Mf_k(x)|^2\right)^{1/2}\right\|_p \leq A_p\left\|\left(\sum_0^{+\infty}|f_k(x)|^2\right)^{1/2}\right\|_p.$$

Pour obtenir la généralisation de (C) dans le cas des sphères, on doit d'abord recourir à un procédé de sommation plus efficace: nous montrons en effet que les sommes partielles des développements en harmoniques sphériques ne sont pas uniformément bornées dans $L^p(\Sigma_n)$, sauf si $p = 2$ (voir §5). On utilise les sommes de Cesàro, dont on rappelle qu'elles sont défines par

$$S_L^\delta f = \frac{1}{A_L^\delta}\sum_0^L A_{L-l}^\delta H_l f, \quad \text{où } A_L^\delta = \frac{(l+\delta)\cdots(\delta+1)}{l(l-1)\cdots 1}.$$

Si $\delta > (n-1)/2$, il était connu que les sommes de Cesàro sont uniformément bornées dans L^p $(1 \leq p \leq +\infty)$. Nous donnons ici une estimation *ponctuelle* de $\sup_L|S_L^\delta f|$ à l'aide précisément de la fonction maximale de Hardy-Littlewood, ce qui permet d'obtenir le résultat (C) moyennant (D).

Une fois obtenus les résultats (B) et (C), nous en déduisons un théorème de multiplicateurs, en généralisant convenablement la méthode utilisée par Muckenhoupt et Stein (voir [17]), dans leur étude des développements suivant les polynômes ultrasphériques.

Notre théorème principal s'énonce alors:

Théorème (0.1). *Soit* $(\mu_k)_{k\geq 0}$ *une suite de nombres complexes satisfaisant aux conditions*

(A_0) $|\mu_k| \leq C$,

(A_N) $\sup_j 2^{j(N-1)}\sum_{2^j}^{2^{j+1}}|\Delta^N\mu_k| \leq C$,

où N *est le premier entier strictement plus grand que* $n/2$, *alors*

$$\left\|\sum \mu_k H_k f\right\|_{L^p(\Sigma_n)} \leq A_p\left\|\sum H_k f\right\|_{L^p(\Sigma_n)} \qquad (1 < p < +\infty).$$

En résumé, on peut donner la marche à suivre pour la démonstration d'un théorème de multiplicateurs (type Marcinkiewicz). On étudie la convergence en moyenne dans L^p $(1 \leq p < +\infty)$ des sommes de Cesàro (ou des sommes de Riesz), pour laquelle apparait un indice critique δ_0, qui détermine en quelque sorte la "dimension harmonique" du système orthogonal en cause. On cherche alors, par des estimations plus fines, à démontrer une "inégalité maximale", d'où découle (C). Notre conjecture est que l'indice critique pour le Théorème (C) est encore δ_0. On en déduit alors un théorème de multiplicateurs dans L^p $(1 < p < +\infty)$, qui fait intervenir N différences (ou dérivées), où N est le premier entier supérieur ou égal à $\delta_0 + 1$. Nous indiquons d'ailleurs au §7 des généralisations de nos résultats au cas des espaces symétriques compacts de rang 1, des variétés riemanniennes compactes, et au §6, au cas des polynômes ultrasphériques.

La conjecture que le nombre de différences qui intervient est lié à l'indice critique des sommes de Cesàro se voit confirmée dans un autre résultat que nous obtenons, et qui établit un lien entre les multiplicateurs de Σ_n, et les multiplicateurs *radiaux* de $\mathbf{R}^n$. Si ces liens sont sans doute moins complets que ceux existant entre les multiplicateurs de $\mathbf{T}^n$ et ceux de $\mathbf{R}^n$, ils permettent de trouver des résultats négatifs sur Σ_n, tels que la non convergence des sommes partielles, ou des résultats positifs sur $\mathbf{R}^n$: c'est le cas du théorème de multiplicateurs suivant (qu'on pourrait également obtenir directement), qui n'est conséquence ni du théorème d'Hörmander, ni du théorème de Marcinkiewicz.

Théorème (0.2). *Soit m une fonction à valeurs complexes, de classe $\mathcal{C}^N$ sur* $]0, +\infty)$, *et satisfaisant aux conditions*:

(A_0) $|m(\rho)| \leq C$,

(A_N) $2^{j(N-1)}\int_{2^j}^{2^{j+1}} |d^N m(\rho)/d\rho^N|\, d\rho \leq C$,

où N est le premier entier strictement plus grand que $n/2$. Alors m définit un multiplicateur radial de $L^p(\mathbf{R}^n)$ $(1 < p < +\infty)$.

En outre, nous donnons une étude systématique des sommes de Cesàro: résultats de convergence presque partout et localisation (on comparera utilement avec les résultats de Stein [18] sur $\mathbf{T}^n$), étude en-dessous de l'indice critique (cf. les résultats de Fefferman [6]). Nous donnons aussi les théorèmes semblables pour les développements suivant les polynômes ultrasphériques, étendant ainsi les résultats de Muckenhoupt et Stein [17], Askey-Hirschman [1] et Gilbert [10].

Certains des résultats qui figurent ici ont fait l'objet de notes aux C. R. Acad. Sci. ([2], [3], [4]).

Cette introduction serait incomplète, si nous ne remerciions E. M. Stein, qui, de séjour à Orsay nous a accueilli avec bienveillance, nous a éclairé de ses intuitions sur ces problèmes, et nous a communiqué oralement une démonstration simplifiée des résultats de Fefferman [6]. Nous avons également bénéficié de l'enseignement dispensé au cours de l'année 1970–1971 par R. Coifman et G. Weiss, qui nous ont en particulier initiés à la théorie des intégrales singulières sur les espaces de nature homogène. N. Lohoué nous a toujours amicalement encouragés et nous a en particulier suggéré l'énoncé du théorème (1.1). Enfin Madame Dumas, avec sa compétence habituelle, a fait de notre manuscrit quelque peu indigeste un article lisible–du moins nous l'espérons.

1. Lien entre les multiplicateurs zonaux de Σ_n et les multiplicateurs radiaux de $\mathbf{R}^n$. On note Σ_n la sphère de rayon 1 dans $\mathbf{R}^{n+1}$, id est $\Sigma_n = \{\xi \in \mathbf{R}^{n+1}, \|\xi\|^2 = 1\}$; $\mathbf{1}$ désigne le pôle nord de coordonnées $(0, 0, \cdots, 0, 1)$.

La sphère est munie de la métrique riemannienne induite par celle de $\mathbf{R}^{n+1}$. On note exp l'application exponentielle au pôle nord, d la distance géodésique sur Σ_n, et $d\sigma$ la mesure riemannienne, normalisée de sorte que $\int_{\Sigma_n} d\sigma = 1$. Son expression en coordonnées exponentielles est $A_n((\sin \|x\|)/\|x\|)^{n-1} dx$.

Σ_n peut aussi être considérée comme l'espace homogène $SO(n+1)/SO(n)$, où $SO(n)$ est le sous-groupe de $SO(n+1)$ qui laisse le pôle nord invariant. Une fonction à valeurs complexes f sur Σ_n s'identifie à une fonction ${}^{\#}f$ sur $SO(n+1)$, constante sur les classes d'équivalence, au moyen de ${}^{\#}f(g) = f(g(1))$. Cela permet de définir une structure de convolution sur Σ_n. Une classe particulière de fonctions, dites *zonales*, est constituée des fonctions f sur Σ_n, invariantes par l'action de $SO(n)$. Une telle fonction ne dépend alors que de la distance géodésique au pôle nord (3), ou encore du produit scalaire (dans $\mathbf{R}^{n+1}$), soit $f(\xi) = {}^{\flat}f(\xi \cdot 1)$, où ${}^{\flat}f$ est défini sur le segment $[-1, +1]$. La convolution d'une fonction zonale f avec une fonction quelconque g s'écrit alors simplement:

$$(f * g)(\xi) = \int_{\Sigma_n} {}^{\flat}f(\xi \cdot \eta) g(\eta)\, d\sigma(\eta).$$

Les sous-espaces de $L^2(\Sigma_n)$ invariants minimaux sous l'action de $SO(n+1)$ sont les sous-espaces $\mathcal{H}_k$ ($k \in \mathbf{N}$), formés des harmoniques sphériques homogènes de degré k. On note H_k le projecteur orthogonal sur $\mathcal{H}_k$, et $\mathbf{Z}_k$ l'unique fonction zonale de $\mathcal{H}_k$, telle que

$$\forall \phi \in \mathcal{H}_k, \quad \langle \phi, \mathbf{Z}_k \rangle = \phi(1).$$

Il est classique (voir [5], [23]) que $f = \Sigma_0^{+\infty} H_k f$ ($f \in L^2(\Sigma_n)$), que $H_k f = \mathbf{Z}_k * f$, et que ${}^{\flat}\mathbf{Z}_k = (n-1+2k)/(n-1) P_k^{\lambda}$ ($\lambda = (n-1)/2$), où P_k^{λ} est le polynôme de de Gegenbauer d'indice λ et de degré k, défini par $(1 - 2xw + w^2)^{-\lambda} = \Sigma_0^{+\infty} P_k^{\lambda}(x) w^k$. On en déduit aisément le noyau de Poisson de la sphère Σ_n:

$$P_w(\xi) = \sum_0^{+\infty} w^k \mathbf{Z}_k(\xi) = \frac{1 - w^2}{(1 - 2w\langle \xi \cdot 1\rangle + w^2)^{(n+1)/2}}.$$

On appelle multiplicateur zonal de $L^2(\Sigma_n)$ tout opérateur de $L^2(\Sigma_n)$ qui commute à l'action de $SO(n+1)$. Un tel opérateur M s'écrit sous la forme $Mf = \Sigma_0^{+\infty} m_k H_k f$, où $(m_k)_{k \geq 0}$ est une suite bornée de nombres complexes. Si M s'étend en un opérateur continu de L^p dans L^p, on dit que M est un multiplicateur de $L^p(\Sigma_n)$. Cet opérateur peut aussi s'interpréter comme l'opérateur de convolution avec la distribution $\Sigma_0^{+\infty} m_k \mathbf{Z}_k$.

On sera amené à envisager dans la suite la sphère de rayon R dans $\mathbf{R}^{n+1}$; les notations Σ_R, $\exp_R$, $d\sigma_R$ se laissent comprendre par analogie avec la sphère-unité.

---

(3) Ceci est faux pour $n = 1$, il convient alors de se limiter aux fonctions paires sur le tore S^1.

On se propose maintenant de rattacher les multiplicateurs zonaux de la sphère aux multiplicateurs radiaux de $\mathbf{R}^n$. Dans le cas du tore $\mathbf{T}^n$, l'isomorphisme local entre $\mathbf{T}^n$ et $\mathbf{R}^n$ permet d'établir de nombreux résultats; la démonstration de l'un de ces résultats utilise une méthode de passage à la limite, que nous avons pu adapter aux cas des sphères. Une formule asymptotique pour la fonction zonale fournit alors le résultat désiré.

Soit donc m une fonction mesurable bornée de $[0, +\infty)$ dans $\mathbf{C}$. Une telle fonction permet de définir un multiplicateur radial M dans $L^2(\mathbf{R}^n)$ par

$$\widehat{Mf}(x) = m(\|x\|)\hat{f}(x).$$

Par ailleurs, à chaque $\epsilon > 0$, on associe la suite m_ϵ définie par $m_\epsilon(k) = m(\epsilon k)$, et on définit un multiplicateur M_ϵ dans $L^2(\Sigma_n)$ par $M_\epsilon f = \Sigma_0^{+\infty} m_\epsilon(k) H_k f$.

Théorème (1.1). *On suppose que m est une fonction bornée et continue à gauche en tout point de $]0, +\infty[$, que M_ϵ est pour chaque $\epsilon > 0$ un multiplicateur de $L^p(\Sigma_n)$, et que $\sup_{\epsilon > 0} \|M_\epsilon\|_{\mathfrak{L}(L^p(\Sigma_n))} \leq A < +\infty$. Alors M est un multiplicateur de $L^p(\mathbf{R}^n)$ et $\|M\|_{\mathfrak{L}(L^p(\mathbf{R}^n))} \leq C_n \cdot A$, où C_n ne dépend que de la dimension n.*

Un raisonnement habituel montre qu'il suffit de démontrer le théorème pour des fonctions m convenablement décroissantes à l'infini. En effet, posons $m^t(\rho) = m(\rho)e^{-t\rho}$ $(t > 0)$. Alors $m_\epsilon^t(k) = m_\epsilon(k) \cdot (e^{-\epsilon t})^k = m_\epsilon(k) w^k$; or $\Sigma_0^{+\infty} w^k \mathbf{Z}_k$ est le noyau de Poisson P_w de Σ_n, dont on sait qu'il est de norme 1 dans $L^1(\Sigma_n)$. Par suite $\|M_\epsilon^t\|_{\mathfrak{L}(L^p(\Sigma_n))} \leq \|M_\epsilon\|_{\mathfrak{L}(L^p(\Sigma_n))} \leq A$. Si donc le théorème est démontré pour m^t, on en déduit $\|M^t\|_{\mathfrak{L}(L^p(\mathbf{R}^n))} \leq C_n \cdot A$, d'où le résultat en notant que $m^t \longrightarrow m$ en chaque point quand t tend vers 0. On peut donc supposer que $|m(\rho)| \leq C_1 e^{-C_2\rho}$, $C_1, C_2 > 0$. Pour démontrer que M est un opérateur de $L^p(\mathbf{R}^n)$ de norme inférieure à $C_n \cdot A$, il suffit de montrer que pour toutes fonctions f et g nulles hors d'un compact de $\mathbf{R}^n$, et telles que $\|f\|_p \leq 1$, $\|g\|_{p'} \leq 1$ $(1/p + 1/p' = 1)$, on a l'inégalité $|I| = |\langle Mf, g\rangle| \leq C_n A$. Mais M n'est autre que la convolution avec la fonction radiale dont le profil est la transformée de Fourier-Bessel de m; le premier membre de l'inégalité s'écrit donc

$$I = C_n \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} \int_0^{+\infty} (\|x - y\|\rho)^{-\lambda + 1/2} J_{\lambda - 1/2}(\rho\|x - y\|) m(\rho) f(x) g(y) \rho^{n-1}\, d\rho\, dx\, dy,$$

et l'intégrale est absolument convergente grâce au contrôle à l'infini de m.

Si R est choisi suffisamment grand, $\exp_R\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \Sigma_R$ est un difféomorphisme d'un voisinage ouvert Ω des supports de f et g sur un ouvert de Σ_R. Par suite, on peut définir sans ambiguité des fonctions f_R et g_R sur Σ_R, telles que

$f_R(\exp_R x) = f(x)$, $g_R(\exp_R x) = g(x)$, pour $x \in \Omega$. A l'aide de l'homothétie de rapport $1/R$, et en utilisant l'hypothèse du théorème avec $\epsilon = 1/R$, on obtient l'inégalité suivante

$$|I_R| = \left| \frac{1}{R^n} \int_{\Sigma_R} \int_{\Sigma_R} \sum_0^{+\infty} m\left(\frac{k}{R}\right) {}^\flat Z_k \left(\frac{\xi' \cdot \eta'}{R^2}\right) f_R(\xi') g_R(\eta') d\sigma_R(\xi') d\sigma_R(\eta') \right| \leq A.$$

On va montrer que $I_R \longrightarrow C_n \cdot I$, quand R tend vers $+\infty$. Par un changement de variables,

$$I_R = \frac{C^n}{R^n} \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} \sum_0^{+\infty} m\left(\frac{k}{R}\right) {}^\flat Z_k \left(\frac{\exp_R x \cdot \exp_R y}{R^2}\right)$$

$$\cdot f(x) g(y) \left(\frac{\sin \|x\|/R}{\|x\|/R}\right)^{n-1} \left(\frac{\sin \|y\|/R}{\|y\|/R}\right)^{n-1} dx\, dy.$$

Posons pour un instant

$$H_R(x, y) = \frac{1}{R^n} \sum_0^{+\infty} m\left(\frac{k}{R}\right) {}^\flat Z_k \left(\frac{\exp_R x \cdot \exp_R y}{R^2}\right) = \int_0^{+\infty} h_R(\rho) \rho^{n-1} d\rho,$$

où h_R est la fonction sur $]0, +\infty[$, constante par intervalles, définie comme suit: on appelle k la partie entière de $R\rho$ ($k \leq R\rho < k+1$) et alors

$$h_R(\rho) = \left(\int_{k/R}^{(k+1)/R} \rho^{n-1} d\rho \right)^{-1} \frac{1}{R^n}\, m\left(\frac{k}{R}\right) {}^\flat Z_k \left(\frac{\exp_R x \cdot \exp_R y}{R^2}\right).$$

Utilisant la décroissance à l'infini de m, et le fait que ${}^\flat Z_k$ est $O(k^{n-1})$, on voit que h_R est dominé (uniformément en R) par une fonction sommable pour la mesure $\rho^{n-1} d\rho$. D'après le théorème de la convergence dominée, il reste à montrer que $h_R(\rho) \longrightarrow C_n (\rho\|x - y\|)^{-\lambda+1/2} J_{\lambda-1/2}(\rho\|x - y\|) \cdot m(\rho)$ quand R tend vers $+\infty$. La fonction m étant continue à gauche, on en déduit que $m(k/R) \longrightarrow m(\rho)$. Ensuite,

$$\frac{\exp_R x \cdot \exp_R y}{R^2} = \exp \frac{x}{R} \cdot \exp \frac{y}{R} = \cos d\left(\exp \frac{x}{R}, \exp \frac{y}{R}\right).$$

Or, d'après un résultat général de géométrie riemannienne (voir [11, p. 54]), ou par un développement limité,

$$d\left(\exp \frac{x}{R}, \exp \frac{y}{R}\right) = \frac{\|x - y\|}{R} + o\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\rho\|x - y\|}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right).$$

D'autre part $(\int_{k/R}^{(k+1)/R} \rho^{n-1} d\rho)^{-1} = R^n \cdot (1 + O(1/k))/k^{n-1}$. Le passage à la limite est achevé par une variante de la fomule de Mehler-Heine (voir [22, p. 190], [23, p. 233]).

Lemme (1.2). *Soit z un nombre réel strictement positif; alors*

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k^{n-1}} {}^\flat Z_k \left(\cos\left(\frac{z}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right) = C_\lambda \cdot z^{-\lambda+1/2} J_{\lambda-1/2}(z).$$

2. Etude des noyaux de Cesàro sur la sphère Σ_n. Rappelons d'abord la définition des sommes de Cesàro(4): on pose, pour Re $\delta > -1$, $(1-x)^{-1-\delta} = \sum_{l=0}^{+\infty} A_l^\delta x^l$, de sorte que

$$A_l^\delta = \binom{l+\delta}{l} = \frac{(l+\delta)(l+\delta-1)\cdots(\delta+1)}{l(l-1)\cdots 1} = \frac{\Gamma(l+\delta+1)}{\Gamma(l+1)\Gamma(\delta+1)}.$$

Si maintenant $f = \sum_{l=0}^{+\infty} H_l f$ est une décomposition orthogonale, sa Lième somme de Cesàro d'indice δ est définie par $S_L^\delta f = (1/A_L^\delta)\sum_0^L A_{L-l}^\delta H_l f$. De la définition découlent immédiatement les deux égalités:

$$A_{l+1}^\delta = \frac{\delta}{l+1} A_l^{\delta+1} \quad \text{et} \quad A_L^{\delta+\sigma+1} = \sum_0^L A_l^\delta A_{L-l}^\sigma.$$

Enfin la convexité de Log $\Gamma(x)$ sur $]0, +\infty)$ permet d'obtenir l'estimation $A_l^\delta = O(l^\delta)$ ($\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > -1$). Dans le cas de la sphère Σ_n, $S_L^\delta f = s_L^\delta * f$, où s_L^δ est la fonction zonale définie par $s_L^\delta = (1/A_L^\delta)\sum_0^L A_{L-l}^\delta \mathbf{Z}_l$; c'est donc essentiellement le noyau de Cesàro (d'indice δ) des développements suivant les polynômes de Gegenbauer d'indice $\lambda = (n-1)/2$. Notons en effet que deux systèmes de pôlynomes orthogonaux de degré croissant (mais non nécessairement orthonormés) pour une même mesure ont mêmes noyaux de Cesàro.

Les noyaux de Cesàro des pôlynomes ultrasphériques, et plus généralement des polynômes de Jacobi ont été étudiés par divers auteurs ([15], [22, Chapitre IX]). Nous nous inspirons ici de la méthode de Szegö pour obtenir des estimations précises de ces noyaux, estimations qui sont indispensables pour la suite. Nous traitons le cas des polynômes de Jacobi d'indice α, β quelconques, avec toutefois la restriction que $\alpha \geq \beta \geq -\frac{1}{2}$; cela couvre en particulier l'étude des noyaux de Cesàro de tous les espaces symétriques compacts de rang 1 (voir §7). Soit donc $f = \sum_{l=0}^{+\infty} a_l P_l^{\alpha,\beta}$, alors

$$S_L^\delta f(1) = \frac{1}{A_L^\delta} \sum_{l=0}^{L} A_{L-l}^\delta a_l P_l^{\alpha,\beta}(1) = \int_{-1}^{+1} f(x) s_L^\delta(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx,$$

où $s_L^\delta(x) = (1/A_L^\delta)\sum_{l=0}^L A_{L-l}^\delta \|P_l^{\alpha,\beta}\|_2^{-2} P_l^{\alpha,\beta}(1) P_l^{\alpha,\beta}(x)$.

Théorème (2.1)(5). *Soit* $\delta \geq 0$; *alors*

(i) *si* $0 \leq \theta \leq \pi/2$,

$$|s_L^\delta(\cos\theta)| \leq C \cdot L^{2\alpha+2};$$

(ii) *si* $2/L \leq \theta \leq \pi/2$,

---

(4) Pour tout ce qui concerne les sommes de Cesàro, voir [25, Chapitre III].

(5) Dans le cas $\alpha=\beta$, une partie de ces estimations a été démontrée par Kogbetliantz [15], en suivant d'ailleurs une méthode différente.

$$|s_L^\delta(\cos\theta)| \le C\cdot L^{\alpha+\frac12-\delta}|\theta|^{-\alpha-\delta-3/2} \qquad (\delta \le \alpha + 3/2);$$

$$\le C\cdot L^{-1}|\theta|^{-2\alpha-3} \qquad (\delta \ge \alpha+3/2);$$

(iii) *si* $\pi/2 \le \theta \le \pi - 2/L$,

$$|s_L^\delta(\cos\theta)| \le C\cdot L^{\alpha+\frac12-\delta}|\pi-\theta|^{-\beta-\frac12} \qquad (\delta \le \alpha+3/2),$$

$$\le C\cdot L^{-1}|\pi-\theta|^{-\alpha-\beta-2+\delta} \qquad (\alpha+3/2 \le \delta \le \alpha+\beta+2),$$

$$\le C\cdot L^{-1} \qquad (\delta \ge \alpha+\beta+2);$$

(iv) *si* $\pi/2 \le \theta \le \pi$,

$$|s_L^\delta(\cos\theta)| \le C\cdot L^{\alpha+\beta+1-\delta} \qquad (\delta \le \alpha+\beta+2),$$

$$\le C\cdot L^{-1} \qquad (\delta \ge \alpha+\beta+2).$$

Avant d'entamer la démonstration, rappelons quelques estimations sur les polynômes de Jacobi:

$$|P_l^{p,s}(\cos\theta)| \le \begin{cases} C\cdot l^p, & 0\le\theta\le\pi/2,\\ C\cdot l^{-\frac12}\theta^{-p-\frac12}, & 0<\theta\le\pi/2,\\ C\cdot l^{-\frac12}|\pi-\theta|^{-s-\frac12}, & \pi/2\le\theta<\pi,\\ C\cdot l^s, & \pi/2\le\theta\le\pi,\end{cases}$$

(voir [22, p. 167])

$$P_l^{\alpha,\beta}(1) = \binom{l+\alpha}{l} = O(l^\alpha) \qquad \text{(ibid., p. 58)};$$

$$\|P_l^{\alpha,\beta}\|_2^{-2} = \left(\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2l+\alpha+\beta+1}\cdot\frac{\Gamma(l+\alpha+1)\Gamma(l+\beta+1)}{\Gamma(l+1)\Gamma(l+\alpha+\beta+1)}\right)^{-1} = O(l) \qquad \text{(ibid., p. 68)}.$$

Démonstration de (i). On utilise la majoration uniforme des polynômes de Jacobi; d'où

$$|s_L^\delta| \le \frac{1}{A_L^\delta}\sum_0^L A_{L-l}^\delta O(l)O(l^\alpha)O(l^\alpha) \le c^{te}L^{2\alpha+2}.$$

Démonstration de (ii). Supposons d'abord δ entier. Szegö a montré le résultat suivant [22, p. 256]:

Lemme (2.2). $s_L^\delta(x) = (1/A_L^\delta)\sum_{l=0}^L H_l(L,\delta)P_l^{\alpha+\delta+1,\beta}(x)$, *où*

$$H_l(L,\delta) \le \begin{cases} C\cdot L^{\delta-1} & si\ l=0,\\ C\sum_{\rho=0}^{\delta-1}(L-l)^\rho l^{\alpha-\rho} & si\ 1\le l\le L-1,\\ C\cdot L^{\alpha+1} & si\ l=L.\end{cases}$$

Soit d'abord $\delta < \alpha + 3/2$; on majore alors facilement en utilisant la deuxième majoration de $P_l^{\alpha+\delta+1,\beta}$ sur $]0, \pi/2[$

$$|s_L^\delta(\cos\theta)| \leq \frac{C}{L^\delta}\left(L^{\delta-1} + \sum_{l=1}^{L-1}\sum_{\rho=0}^{\delta-1}(L-l)^\rho l^{\alpha-\rho} l^{-\frac{1}{2}} + L^{\alpha+1}L^{-\frac{1}{2}}\right)|\theta|^{-\alpha-\delta-3/2}$$

$$\leq C\cdot L^{\alpha+\frac{1}{2}-\delta}|\theta|^{-\alpha-\delta-3/2}.$$

Si au contraire $\delta > \alpha + 3/2$, on majore de la même façon la contribution des termes $l = 0$ et $l = L$. Ensuite on coupe en $\sum_{1\leq l\leq 1/\theta} + \sum_{1/\theta\leq l\leq L/2} + \sum_{L/2\leq l\leq L-1}$, et on majore comme suit:

$$\sum_{L/2}^{L-1} \leq \frac{C}{L^\delta}\left(\sum_{L/2}^{L-1}\sum_{\rho=0}^{\delta-1}(L-l)^\rho l^{\alpha-\rho} l^{-\frac{1}{2}}\right)|\theta|^{-\alpha-\delta-3/2}$$

$$\leq \frac{C}{L^\delta}\left(\sum_{L/2}^{L-1}(L-l)^{\delta-1}\right)L^{\alpha-\delta+\frac{1}{2}}|\theta|^{-\alpha-\delta-3/2} \leq C\cdot L^{\alpha-\delta+\frac{1}{2}}|\theta|^{-\alpha-\delta-3/2},$$

majoration qui est meilleure que celle à obtenir, compte tenu de $L\theta \geq 2$.

$$\sum_{1/\theta}^{L/2} \leq \frac{C}{L^\delta}\left(\sum_{1/\theta}^{L/2}\sum_{\rho=0}^{\delta-1}(L-l)^\rho l^{\alpha-\rho} l^{-\frac{1}{2}}\right)|\theta|^{-\alpha-\delta-3/2}$$

$$\leq \frac{C}{L^\delta}\left(\sum_{1/\theta}^{L/2}L^{\delta-1}l^{\alpha-\delta+\frac{1}{2}}\right)|\theta|^{-\alpha-\delta-3/2} \leq \frac{C}{L}\cdot\theta^{-\alpha+\delta-3/2-\alpha-\delta-3/2}.$$

Enfin, là où $l \leq 1/\theta$, id est $\theta \leq 1/l$, on utilise la majoration uniforme des polynômes de Jacobi. D'où

$$\sum_{1}^{1/\theta} \leq \frac{C}{L^\delta}\sum_{1}^{1/\theta}\left(\sum_{\rho=0}^{\delta-1}(L-l)^\rho l^{\alpha-\rho} l^{\alpha+\delta+1}\right)$$

$$\leq \frac{C}{L^\delta}L^{\delta-1}\sum_{1}^{1/\theta}l^{2\alpha+2} \leq \frac{C}{L}\theta^{-2\alpha-3}.$$

Lorsque $\delta = \alpha + 3/2$ est un entier, la méthode précédente fournit une estimation un peu moins bonne que celle recherchée. Pour traiter ce cas, ainsi que les cas où δ est un indice non entier, on va utiliser une autre décomposition des noyaux de Cesàro, due elle aussi à Szegö (voir [22, p. 259]).

Lemme (2.3).

$$s_L^\delta(x) = \frac{1}{A_L^\delta}\left\{2^{\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(L+\beta+1)\Gamma(2L+\alpha+\beta+2\delta+3)}{\Gamma(L+\alpha+\beta+\delta+2)\Gamma(2L+\alpha+\beta+\delta+3)}\right\}^{-1} P_l^{\alpha+\delta+1,\beta}(x)$$

$$-\sum_{\rho=1}^{+\infty}(-1)^\rho\frac{(L+\delta+1)\cdots(L+\delta+\rho)}{(2L+\alpha+\beta+\delta+3)\cdots(2L+\alpha+\beta+\delta+\rho+2)}$$

$$\frac{\delta(\delta-1)\cdots(\delta-\rho+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot\rho}\, s_L^{\delta+\rho}(x).$$

Avant d'utiliser ce lemme, montrons un résultat auxiliaire.

Lemme (2.4). *Soit δ_0 un entier, $\delta_0 \neq \alpha + 3/2$; si $\delta > \delta_0$, et désignant par $r_L^{\delta_0}(\theta)$ la fonction majorante qui figure dans le Théorème* (2.1), *on a* $|s_L^\delta(\cos\theta)| \leq C_{\delta_0}\cdot\delta\cdot r_L^{\delta_0}(\theta)$.

On a en effet la relation $s_L^\delta = (1/A_L^s)\sum_{l=0}^L A_{L-l}^{\delta-\delta_0-1} A_l^{\delta_0} s_l^{\delta_0}$; majorant $|s_l^{\delta_0}|$ par $r_l^{\delta_0}$, et utilisant la forme particulière de cette majorante sur les divers intervalles on voit qu'il suffit de démontrer l'inégalité $(1/A_L^\delta)\sum_{l=0}^L A_{L-l}^{\delta-\delta_0-1} A_l^{\delta_0}(l+1)^{\gamma_0} \leq C_{\delta_0}\cdot\delta\cdot(L+1)^{\gamma_0}$, où $\gamma_0 \geq -1$. Noter qu'on a changé l en $(l+1)$ dans les estimations, ce qui est toujours possible, et indispensable quand $l = 0$. On écrit alors $(l+1)^{\gamma_0} = (l+1)^{-1}(l+1)^{\gamma_0+1} \leq L^{\gamma_0}\cdot L\cdot(l+1)^{-1}$ de sorte qu'il suffit de montrer le résultat lorsque $\gamma_0 = -1$. Or $A_l^{\delta_0}/(l+1) = A_{l+1}^{\delta_0-1}/\delta_0$, de sorte que la somme à majorer s'écrit:

$$\frac{1}{A_L^\delta}\sum_{l=0}^{L} A_{L+1-(l+1)}^{\delta-\delta_0-1}A_{l+1}^{\delta_0-1} = \frac{1}{A_L^\delta}\cdot A_{L+1}^{\delta-1} = \frac{\delta}{L+1}.$$

Cela étant, revenons à la formule de Szegö. Le coefficient du premier terme est $O(L^{\alpha+1-\delta})$, et par suite ce premier terme se majore dans tous les cas comme il faut. La sommation ne fait intervenir que des indices supérieurs ou égaux au premier entier strictement plus grand que δ (dans le cas où $\delta = \alpha + 3/2$ est entier, le premier indice qui intervient est $\alpha + 5/2$), de sorte qu'on peut majorer $|s_L^{\delta+\rho}|$ par $C\cdot(\rho+\delta)\cdot r_L^{[\delta]+1}(\theta)$. Concernant le coefficient, on note d'abord que $|(\delta(\delta-1)\cdots(\delta-\rho+1))/(1\cdots\rho)| \leq C\cdot\rho^{-1-\delta}$; ensuite

$$\frac{(L+\delta+1)\cdots(L+\delta+\rho)}{(2L+\alpha+\beta+\delta+3)\cdots(2L+\alpha+\beta+\delta+\rho+2)}$$
$$\leq C\cdot\frac{(\delta+2)\cdots(\delta+\rho+1)}{(\alpha+\beta+\delta+5)\cdots(\alpha+\beta+\delta+\rho+4)},$$

car la fonction $(x+\delta+k)/(2x+\alpha+\beta+\delta+k+1)$ est décroissante (dès lors que $k > (\alpha+\beta+1)-\delta$). Ce dernier coefficient est donc $O(\rho^{-(\alpha+\beta+3)})$. D'où finalement

$$\sum_{\rho=1}^{+\infty} \leq C\left(\sum_{\rho=1}^{+\infty} \rho^{1-\delta} \cdot \rho^{-(\alpha+\beta+3)} \cdot \rho\right) r_L^{[\delta]+1}(\theta) \leq C \cdot r_L^{[\delta]+1}(\theta).$$

On utilise d'abord ce résultat pour obtenir le cas où $\delta = \alpha + 3/2$ est entier, puis le cas général.

Les majorations de (iii) et (iv) sont fondées sur les mêmes lemmes et ne comportent pas de difficultés nouvelles.

Corollaire (2.5). *Soit* s_L^δ *le noyau de Cesàro d'indice* δ *de* Σ_n; *alors*

(i) *si* $d(x, 1) \leq \pi/2$,

$$|s_L^\delta(x)| \leq C \cdot L^n;$$

(ii) *si* $2/L \leq d(x, 1) \leq \pi/2$,

$$\begin{aligned} |s_L^\delta(x)| &\leq C \cdot L^{((n-1)/2-\delta)} d(x, 1)^{-(n-1)/2-\delta-1} && (\delta \leq (n+1)/2), \\ &\leq C \cdot L^{-1} d(x, 1)^{-n-1} && (\delta \geq (n+1)/2); \end{aligned}$$

(iii) *si* $\pi/2 \leq d(x, 1) \leq \pi - 2/L$,

$$\begin{aligned} |s_L^\delta(x)| &\leq C \cdot L^{((n-1)/2-\delta)} d(x, -1)^{-(n-1)/2} && (\delta \leq (n+1)/2), \\ &\leq C \cdot L^{-1} d(x, -1)^{-n+\delta} && ((n+1)/2 \leq \delta \leq n), \\ &\leq C \cdot L^{-1} && (\delta \geq n); \end{aligned}$$

(iv) *si* $\pi - 2/L \leq d(x, 1) \leq \pi$,

$$\begin{aligned} |s_L^\delta(x)| &\leq C \cdot L^{n-1-\delta} && (\delta \leq n), \\ &\leq C \cdot L^{-1} && (\delta \geq n). \end{aligned}$$

Remarques. (1) Signalons que E. Kogbetliantz a montré dans [15] que si $\delta \geq n$, alors $s_L^\delta \geq 0$ en tout point; c'est une généralisation du résultat classique de Fejér (cas $n = 1$). Par suite, on doit s'attendre à ce que les majorations de s_L^δ ne s'améliorent plus lorsque δ devient supérieur à n.

(2) Le noyau de Poisson $P_r(x) = \Sigma_0^{+\infty} r^k Z_k(x) = (1 - r^2)/|rx - 1|^{n+1}$ satisfait les majorations suivantes:

$$\begin{aligned} P_r(x) &\leq C \cdot (1-r)^{-n}, && 0 \leq d(x, 1) \leq \pi, \\ &\leq C \cdot d(x, 1)^{-n-1} \cdot (1-r), && 0 \leq d(x, 1) \leq \pi/2, \\ &\leq C \cdot (1-r), && \pi/2 \leq d(x, 1) \leq \pi, \end{aligned}$$

et le calcul de P_r en $1, -1$ et un point équatorial montre qu'on ne peut espérer améliorer ces majorations. Or le noyau de Poisson s'exprime en fonction des sommes de Cesàro d'indice δ par la formule $P_r = (1-r)^{1+\delta} \Sigma_{l=0}^{+\infty} A_l^\delta r^l s_l^\delta$. Substituant alors à r la quantité $1 - 1/L$ (cf. la remarque de [25, p. 223]), on voit que toute majoration de s_L^δ en $l^{-\alpha}\theta^{-\beta}$ se transfère immédiatement au noyau $P_{1-1/L}$. Les paliers observés dans les majorations ($\delta = (n+1)/2$, et $\delta = n$) sont bien ceux que laissent prévoir cette remarque.

(3) Les remarques précédentes valent encore pour les polynômes ultrasphériques d'indice λ quelconque. Dans le cas des polynômes de Jacobi quelconques, Askey a conjecturé que $s_L^\delta \geq 0$, dès lors que $\delta \geq \alpha + \beta + 2$.

3. **Résultats de convergence des développements en harmoniques sphériques.** Il était bien connu que les fonctions s_L^δ appartiennent uniformément à $L^1(\Sigma_n)$, dès que $\delta > (n-1)/2$, et donc que les moyennes de Cesàro d'ordre $\delta > (n-1)/2$ d'une fonction f de $L^p(\Sigma_n)$ convergent dans $L^p(\Sigma_n)$ vers f $(1 \leq p < +\infty)$. Au §5, nous verrons comment ce résultat peut être amélioré lorsque $p > 1$ et $\delta < (n-1)/2$.

Nous allons, dans ce paragraphe, nous intéresser à d'autres types de convergence: les majorations du §2 vont nous permettre d'obtenir des résultats de localisation et de convergence presque partout. Notre premier souci va être d'interpréter ces majorations.

Posons $s_L^\delta(\cos\theta) = \sigma_L^\delta(\cos\theta) + r_L^\delta(\cos\theta)$, où

$$\sigma_L^\delta(\cos\theta) = s_L^\delta(\cos\theta)\chi_{[0,\pi/2]}(\theta),$$

et de même $S_L^\delta f = \sigma_L^\delta f + r_L^\delta f$.

Si $\lambda = (n-1)/2 \geq \delta$, il résulte de la majoration (iii) du théorème que:

$$|r_L^\delta(\cos\theta)| \leq A\,|\pi - \theta|^{-2\lambda+\delta} \qquad \text{si } \delta \leq 2\lambda,$$

$$|r_L^\delta(\cos\theta)| \leq A \qquad \text{si } \delta \geq 2\lambda.$$

Soit $\delta < 2\lambda$:

$$\left\|\sup_L |r_L^\delta|\right\|_p \leq A\left(\int_{\pi/2}^{\pi} |\pi-\theta|^{(-2\lambda+\delta)p}|\pi-\theta|^{2\lambda}\,d\theta\right)^{1/p} < \infty \quad \text{si } p < \frac{2\lambda+1}{2\lambda-\delta}.$$

Donc $\sup_L |r_L^\delta| \in L^p(\Sigma_n)$ pour $p < n/(n-1-\delta)$ si $(n-1)/2 \leq \delta < n-1$, $\sup_L |r_L^\delta| \in L^\infty(\Sigma_n)$ si $\delta \geq n-1$.

Montrons d'autre part que, si $\delta > \lambda = (n-1)/2$, il existe une constante A telle que, pour tout $f \in L^1(\Sigma_n)$ et pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $\sup_L |\sigma_L^\delta f(x)| \leq AMf(x)$ (6). Quitte à changer f, on peut supposer que $x = 1$.

$$\sigma_L^\delta f(1) = \int_{\Sigma_n} \sigma_L^\delta(x \cdot 1) f(x)\,d\sigma(x)$$

$$= \int_0^\pi \sigma_L^\delta(\cos\theta)\int_{\Sigma_{n-1}} f(\sin\theta\xi, \cos\theta)\sin^{n-1}\theta\,d\xi\,d\theta.$$

(6) On désigne par Mf la fonction maximale de Hardy-Littlewood (cf. introduction) $Mf(x) = \sup_{r>0}\left(\int_{d(x,y)\leq r} |f(y)|\,d\sigma(y)\right)/\int_{d(x,y)\leq r} d\sigma(y)$.

Posons:

$$\Lambda(\theta) = \int_{x\cdot 1 \geq \cos\theta} |f(x)|\, d\sigma(x) = \int_0^\theta \int_{\Sigma_{n-1}} |f(\sin\phi\xi, \cos\phi)|\, d\xi \sin^{n-1}\phi\, d\phi,$$

$$\Lambda(\theta) \leq Mf(1) \int_{x\cdot 1 \geq \cos\theta} d\sigma(x) = C_n Mf(1) \int_0^\theta \sin^{n-1}\phi\, d\phi.$$

Posons d'autre part:

$$k_L(\theta) = L^{\lambda-\delta}(L^{-2} + \theta^2)^{(-\lambda-\delta-1)/2} \quad \text{si } \delta \leq \lambda + 1,$$

$$k_L(\theta) = L^{-1}(L^{-2} + \theta^2)^{-\lambda-1} \quad \text{si } \delta \geq \lambda + 1.$$

En vertu du Corollaire (2.5), $\sigma_L^\delta(\cos\theta) \leq Ak_L(\theta)$,

$$|\sigma_L^\delta f(1)| \leq A\left[\int_0^\pi (-k_L'(\theta))\Lambda(\theta)\, d\theta + \Lambda(\pi)k_L(\pi)\right]$$

comme le montre une intégration par parties et le fait que k_L' est négatif

$$|\sigma_L^\delta f(1)| \leq A\left(-\int_0^\pi k_L'(\theta)\int_0^\theta \sin^{n-1}\phi\, d\phi\, d\theta + k_L(\pi)\int_0^\pi \sin^{n-1}\phi\, d\phi\right) Mf(1).$$

Or

$$-\int_0^\pi k_L'(\theta)\int_0^\theta \sin^{n-1}\phi\, d\phi = -k_L(\pi)\int_0^\pi \sin^{n-1}\phi\, d\phi + \int_0^\pi k_L(\theta)\sin^{n-1}\theta\, d\theta.$$

Comme $\sup_L \int_0^\pi k_L(\theta)\sin^{n-1}\theta\, d\theta < \infty$, il existe une constante A telle que $\sigma_L^\delta f(1) \leq AMf(1)$.

On peut résumer ces résultats dans le théorème suivant:

Théorème (3.1). *Soit $\delta > (n-1)/2$. Il existe une constante A indépendante de la fonction $f \in L^1(\Sigma_n)$ telle que $\sup_L |S_L^\delta f| \leq A(Mf + K * |f|)$ où K est une fonction positive qui appartient à $L^p(\Sigma_n)$ pour les valeurs de p inférieures à $n/(n-1-\delta)$ lorsque $\delta < n-1$, à $L^\infty(\Sigma_n)$ lorsque $\delta \geq n-1$.*

Il est à remarquer que la majoration $\sup_L |S_L^\delta f| \leq AMf$ lorsque $\delta \geq n-1$ a été obtenue dans un cadre beaucoup plus général par Hörmander ([12], [13]), du moins lorsque les moyennes de Cesàro sont remplacées par les moyennes de Riesz. Nos résultats vont nous permettre, dans ce cas particulier, d'obtenir des théorèmes de localisation plus précis.

Théorème (3.2). Soit $\epsilon > 0$, $\delta \geq (n-1)/2$. *Si la fonction f appartient à l'espace $L^p(\Sigma_n)$, $p \geq 1$, où $p > n/(\delta+1)$, et si f s'annule à l'intérieur de la boule $d(x, 1) < \epsilon$, alors $S_L^\delta f(1)$ tend vers 0, lorsque L tend vers l'infini.*

En utilisant la densité des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ dans $L^p(\Sigma_n)$, on se ramène à montrer l'existence d'une constante A_p indépendante de f telle $\sup_L |S_L^\delta f(1)| \leq A_p \|f\|_p$ pour toute fonction f s'annulant à l'intérieur de la boule $d(x, 1) < \epsilon$.

Cette dernière inégalité est satisfaite si $s_L^\delta(\cos\theta)\chi_{[\epsilon,\pi]}(\theta)$ appartient uniformément à $L^{p'}(\sin^{2\lambda}\theta d\theta)$, $1/p+1/p'=1$. Or, si $\epsilon \geq L^{-1}$,

$$|\sigma_L^\delta(\cos\theta)| \leq AL^{\lambda-\delta}\theta^{-\lambda-\delta-1} \leq A\epsilon^{-\lambda-\delta-1} \quad \text{lorsque } \theta \geq \epsilon;$$

$$\|\tau_L^\delta\|_{p'} \leq A \quad \text{si } p > n/(\delta+1).$$

Remarque. On peut montrer que les conditions du Théorème (3.2) sont des conditions nécessaires pour qu'il y ait localisation. Supposons tout d'abord $\delta > (n-1)/2$, et $p < n/(\delta+1)$: la fonction $(1+x\cdot 1)^{-\mu}$, qui appartient à $L^p(\Sigma_n)$ lorsque $p < n/2\mu$, est $\mathcal{C}^\infty$ ou voisinage de 1. Il existe donc une fonction qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur Σ_n, dont les moyennes de Cesàro $S_L^\delta f(1)$ convergent vers $f(1)$ de ce fait, et qui coïncide avec $(1+x\cdot 1)^{-\mu}$ dans la boule $d(x,1)<\epsilon$. Comme les moyennes de Cesàro d'ordre $2\mu-1$ de $(1+x\cdot 1)^{-\mu}$ ne convergent pas en 1 (voir [22, p. 265]), on obtient ainsi un contre-exemple explicite avec $\delta = 2\mu-1$.

Plus généralement, en vertu du théorème de Banach-Steinhaus, les conclusions du Théorème (3.2) ont lieu si et seulement si $\sup_L|S_L^\delta f(1)| \leq A\|f\|_p$ quelle que soit la fonction $f\in L^p(\Sigma_n)$ nulle dans la boule $d(x,1)<\epsilon$, et donc si et seulement si $s_L^\delta(\cos\theta)\chi_{[\epsilon,\pi]}(\theta)$ appartient uniformément à $L^{p'}(\sin^{2\lambda}\theta d\theta)$.

Soit alors $(n-1)/2 \leq \delta < n-1$, $p = n/(\delta+1)$. On veut montrer que $\tau_L^\delta(\cos\theta)$ n'appartient pas uniformément à $L^{p'}(\sin^{2\lambda}\theta d\theta)$. En utilisant le Lemme (2.3), on voit aisément qu'il suffit de montrer que $L^{\lambda-\delta+½}P_L^{\lambda+\delta+½,\lambda+½}(\cos\theta)\chi_{[\pi/2,\pi]}(\theta)$ n'appartient pas uniformément à $L^{p'}(\sin^{2\lambda}\theta d\theta)$. Cette dernière propriété découle de la formule asymptotique de Mehler-Heine, comme on peut le voir en utilisant la méthode de Szegö [22, p. 173].

De même, lorsque $\delta < (n-1)/2 = \lambda$, on est ramené à montrer que $L^{\lambda-\delta+½}P_L^{\lambda+\delta+½,\lambda+½}(\cos\theta)\chi_{[\epsilon,\pi/2]}(\theta)$ n'appartient pas uniformément à $L^1(\sin^{2\lambda}\theta d\theta)$ pour prouver que, quel que soit p, il n'y a pas localisation pour les fonctions de $L^p(\Sigma_n)$. Or

$$\int_\epsilon^{\pi/2}\sin^{2\lambda}\theta|P_L^{\lambda+\delta+½,\lambda+½}(\cos\theta)|\,d\theta \geq A_\mu\int_\epsilon^{\pi/2}\sin^{2\mu}\theta|P_L^{\lambda+\delta+½,\lambda+½}(\theta)|\,d\theta$$

quel que soit μ. Si μ est suffisamment grand, cette dernière quantité est minorée par $L^{-½}$ [22, p. 173].

Théorème (3.3). *Soit $\delta > (n-1)/2$. Il existe une constante A telle que, pour toute fonction $f\in L^1(\Sigma_n)$, $m\{\sup_L|S_L^\delta f| > \alpha\} \leq (A/\alpha)\|f\|_1$. Les moyennes de Cesàro d'ordre δ d'une fonction de $L^1(\Sigma_n)$ convergent presque partout.*

La convergence presque partout est une conséquence de l'inégalité faible, qui découle du Théorème (3.1).

Corollaire (3.4). *Soit $1 < p \leq 2$. Si $\delta > (n-1)[1/p - 1/2]$, il existe une* *constante* A_p *telle que, pour tout* $f \in L^p(\Sigma_n)$, $\|\sup_L |S_L^\delta f|\,\|_p \leq A_p \|f\|_p$. *Les moyennes de Cesàro d'ordre* δ *d'une fonction de* $L^p(\Sigma_n)$ *convergent presque partout.*

Le résultat, lorsque $p = 2$, découle du lemme suivant, qui est un cas particulier d'un résultat général sur les systèmes orthonormaux:

Lemme (3.5). *Si, pour une valeur* $\delta_0 > 0$, *les moyennes d'ordre* δ_0 *des fonctions de* $L^2(\Sigma_n)$ *satisfont à l'inégalité* $\|\sup_L |S_L^{\delta_0} f|\,\|_2 \leq A_{\delta_0} \|f\|_2$, *alors, quel que soit* $\delta > 0$, *elles satisfont à l'inégalité* $\|\sup_L |S_L^\delta f|\,\|_2 \leq A_\delta \|f\|_2$.

La démonstration, dans le cas de $\mathbf{R}^n$ et lorsque les moyennes de Cesàro sont remplacées par les moyennes de Riesz, se trouve dans [12]. Elle est tout à fait analogue dans le cas présent. Nous en donnerons seulement un aperçu.

Les moyennes de Cesàro d'ordre $\delta + \beta$ s'obtiennent à partir des moyennes de Cesàro d'ordre δ par la formule

$$S_L^{\delta+\beta} f = (A_L^{\delta+\beta})^{-1} \sum_{k=0}^{L} A_k^\delta A_{L-k}^{\beta-1} S_k^\delta f.$$

$$(A_L^{\delta+\beta})^{-2} \sum_{k=0}^{L} (A_k^\delta A_{L-k}^{\beta-1})^2 = O\left(L^{-2\delta-2\beta} \sum_{k=0}^{L} k^{2\delta}(L-k)^{2\beta-2}\right)$$
$$= O(L^{-1}) \quad \text{si } \beta > \tfrac{1}{2}.$$

Donc, en vertu de l'inégalité de Schwarz, il suffit de montrer que

$$\left\| \sup_L \left(\frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L} |S_k^\delta f|^2 \right)^{1/2} \right\|_2 \leq A_\delta \|f\|_2$$

pour tout $\delta > -\tfrac{1}{2}$.

Or, par hypothèse,

$$\left\| \sup_L \left(\frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L} |S_k^{\delta_0} f|^2 \right)^{1/2} \right\|_2 \leq \left\| \sup_L |S_L^{\delta_0} f| \right\|_2 \leq A_{\delta_0} \|f\|_2.$$

Il suffit donc, pour prouver le résultat, de démontrer que, si $\delta > -\tfrac{1}{2}$, $\|(\sum_{L=0}^\infty |S_L^{\delta+1} f - S_L^\delta f|^2 L^{-1})^{1/2}\|_2 \leq A_\delta \|f\|_2$. Posons

$$g_\delta(f) = \left(\sum_{L=0}^{\infty} |S_L^{\delta+1} f - S_L^\delta f|^2 L^{-1} \right)^{1/2}.$$

$$S_L^{\delta+1}f - S_L^{\delta}f = \sum_{k=0}^{L}\left(\frac{A_{L-k}^{\delta+1}}{A_L^{\delta+1}} - \frac{A_{L-k}^{\delta}}{A_L^{\delta}}\right)H_kf = \frac{1}{\delta+1}\,(A_L^{\delta+1})^{-1}\sum_{k=0}^{L} kA_{L-k}^{\delta}H_kf,$$

$$\|g_\delta(f)\|_2^2 = \frac{1}{(\delta+1)^2}\sum_{L=0}^{\infty} L^{-1}(A_L^{\delta+1})^{-2}\sum_{k=0}^{L} k^2(A_{L-k}^{\delta})^2\|H_kf\|_2^2$$

$$= \frac{1}{(\delta+1)^2}\sum_{k=0}^{\infty} k^2\|H_kf\|_2^2\left(\sum_{L=k}^{\infty} L^{-1}(A_L^{\delta+1})^{-2}(A_{L-k}^{\delta})^2\right) \le A_\delta\|f\|_2^2$$

puisque $\Sigma_k^\infty L^{-1}(A_L^{\delta+1})^{-2}(A_{L-k}^{\delta})^2 = O(\Sigma_k^\infty L^{-1}L^{-(2\delta+2)}(L-k)^{2\delta}) = O(k^{-2})$.

Reprenons la démonstration du Corollaire (3.4): il suffit d'interpoler entre le résultat p_0, $p_0 > 1$, et le résultat L^2 en utilisant la méthode de Stein sur les familles analytiques d'opérateurs [18], S_L^δ étant défini pour des valeurs complexes de δ.

$$S_L^{\delta+\epsilon+iy}f = (A_L^{\delta+\epsilon+iy})^{-1}\sum_{k=0}^{L} A_k^{\delta}A_{L-k}^{\epsilon-1+iy}S_k^{\delta}f,$$

donc $\sup_L|S_L^{\delta+\epsilon+iy}f| \le e^{c_\epsilon y^2}\sup_L|S_L^\delta f|$ puisque (voir [1])

$$\sup_L |A_L^{\delta+\epsilon+iy}|^{-1}\sum_{k=0}^{L} A_k^{\delta}|A_{L-k}^{\epsilon-1+iy}| \le e^{c_\epsilon y^2}$$

On en déduit que si $\delta > (n-1)/2$ et $p_0 > 1$,

$$\left\|\sup_L|S_L^{\delta+iy}f|\right\|_{p_0} \le A_{p_0}e^{cy^2}\|f\|_{p_0};$$

si $\delta > 0$,

$$\left\|\sup_L|S_L^{\delta+iy}f|\right\|_2 \le A_2e^{cy^2}\|f\|_2.$$

Nous allons terminer ce paragraphe en montrant l'inégalité suivante pour les moyennes de Cesàro, inégalité qui est l'outil fondamental pour obtenir les théorèmes de multiplicateurs:

Théorème (3.6). *Soit* $p > 1$ *et* $\delta \ge (n-1)/2$. *Il existe une constante* A_p *telle que pour toute suite de fonctions* f_k *et toute suite d'entiers* L_k,

$$\left\|\left(\sum|S_{L_k}^{\delta}f_k|^2\right)^{1/2}\right\|_p \le A_p\left\|\left(\sum|f_k|^2\right)^{1/2}\right\|_p.$$

Supposons tout d'abord $\delta > (n-1)/2$, cette inégalité découle, en vertu du Théorème (3.1), des deux inégalités

$$\left\|\left(\sum |Mf_k|^2\right)^{1/2}\right\|_p \le A_p \left\|\left(\sum |f_k|^2\right)^{1/2}\right\|_p,$$

inégalité de Fefferman-Stein [8] et

$$\left\|\left(\sum (K * |f_k|)^2\right)^{1/2}\right\|_p \le A_p \left\|\left(\sum |f_k|^2\right)^{1/2}\right\|_p,$$

qui est une inégalité bien connue due à Marcinkiewicz et Zygmund ([25, tome 2, p. 224]).

Le cas $\delta = (n-1)/2$ est un cas particulier du corollaire suivant:

Corollaire (3.7). *Soit* $1 < p \le 2$. *Si* $\delta > (n-1)[1/p - 1/2]$, *les moyennes de Cesàro d'ordre* δ *satisfont à l'inégalité* $\|(\Sigma |S_{L_k}^\delta f_k|^2)^{1/2}\|_p \le A_p \|(\Sigma |f_k|^2)^{1/2}\|_p$ *quelles que soient les suites* f_k *et* L_k.

Remarquons que

$$|S_{L_k}^{\delta+\epsilon+iy} f_k|^2 \le e^{c_\epsilon y^2} (|A_{L_k}^{\delta+\epsilon+iy}|^{-1}) \sum_{j=0}^{L_k} A_j^\delta |A_{L_k}^{\epsilon-1+iy}| \, |S_j^\delta f_k|^2$$

en vertu de l'inégalité de Schwarz.

Si l'inégalité $\|(\Sigma_k |S_{L_k}^\delta f_k|^2)^{1/2}\|_p \le A_p \|(\Sigma_k |f_k|^2)^{1/2}\|_p$ est satisfaite pour toutes les suites L_k et f_k, alors, en particulier,

$$\left\|\left(\sum_k |A_{L_k}^{\delta+\epsilon+iy}|^{-1} \sum_{j=0}^{L_k} A_j^\delta |A_{L_k}^{\epsilon-1+iy}| \, |S_j^\delta f_k|^2\right)^{1/2}\right\|_p$$

$$\le A_p \left\|\left(\sum_k |A_{L_k}^{\delta+\epsilon+iy}|^{-1} \sum_{j=0}^{L_k} A_j^\delta |A_{L_k}^{\epsilon-1+iy}| \, |f_k|^2\right)^{1/2}\right\|_p$$

$$\le A_p e^{c_\epsilon y^2/2} \left\|\left(\sum_k |f_k|^2\right)^{1/2}\right\|_p,$$

donc $\|(\Sigma_k |S_{L_k}^{\delta+\epsilon+iy} f_k|^2)^{1/2}\|_p \le A_p e^{c_\epsilon y^2} \|(\Sigma |f_k|^2)^{1/2}\|_p$. En particulier, si $\delta > (n-1)/2$ et $p > 1$, ou bien si $\delta > 0$ et $p = 2$,

$$\left\|\left(\sum_k |S_{L_k}^{\delta+iy} f_k|^2\right)^{1/2}\right\|_p \le A_p e^{cy^2} \left\|\left(\sum |f_k|^2\right)^{1/2}\right\|_p.$$

Le Corollaire (3.7) s'en déduit par interpolation.

4. **Théorèmes de multiplicateurs.** Soit $f \in L^1(\Sigma_n)$. On note $P_r f$ la fonction

$$P_r f = \sum r^k H_k f, \qquad 0 < r < 1.$$

$P_r f$ est la convolée de la fonction f avec le "noyau de Poisson" sur Σ_n défini par

$$P_r(x) = \sum_0^\infty r^k Z_1^k(x) = \frac{1 - r^2}{|rx - 1|^{n+1}} .$$

P_r est une fonction positive, uniformément dans $L^1(\Sigma_n)$. Soit $g(f)$ la fonction de Littlewood-Paley définie par

$$g(f) = \left(\int_0^1 (1 - r)\left|\frac{\partial}{\partial r}(P_r f)\right|^2 dr\right)^{1/2}.$$

Il existe, si $p > 1$, une constante A_p telle que $\|g(f)\|_p \le A_p \|f\|_p$ et, si $H_0 f = \int_{\Sigma_n} f\,dx = 0$, $\|f\|_p \le A_p \|g(f)\|_p$ (voir [19, Chapitres 3 et 4], [5, p. 149])(7).

Les théorèmes de multiplicateurs découleront de l'étude des fonctions de Littlewood-Paley modifiées suivantes: $g_\delta(f) = (\Sigma_L |S_L^{\delta+1} f - S_L^\delta f|^2 L^{-1})^{1/2}$ pour lesquelles on a le théorème suivant:

Théorème (4.1). *Soient $p > 1$ et $\delta \ge 0$ tels que, pour toute suite de fonctions f_k et toute suite d'entiers L_k, $\|(\Sigma|S_{L_k}^\delta f_k|^2)^{1/2}\|_p \le A_p \|(\Sigma|f_k|^2)^{1/2}\|_p$. Alors, pour toute fonction $f \in L^p(\Sigma_n)$, $\|g_\delta(f)\|_p \le A_p \|f\|_p$ et, si $H_0 f = 0$, $\|f\|_p \le A_p \|g_\delta(f)\|_p$.*

La seconde inégalité est vraie sans restriction sur δ puisqu'elle provient de l'inégalité ponctuelle suivante:

Lemme (4.2). $g(f) \le C \cdot g_\delta(f)$.

En effet,

$$\frac{\partial}{\partial r} P_r f = \sum_{k=1}^\infty k r^{k-1} H_k f;$$

$$S_L^{\delta+1} f - S_L^\delta f \sim L^{-1} (A_L^\delta)^{-1} \sum_{k=0}^L k A_{L-k}^\delta H_k f,$$

$$\frac{\partial}{\partial r} P_r f = (1 - r)^{\delta+1} \sum_{L=1}^\infty \left(\sum_{k=0}^L k A_{L-k}^\delta H_k f\right) r^{L-1}$$

$$\left(\text{puisque } \sum_{k=0}^\infty A_k^\delta r^k = (1 - r)^{-\delta-1}\right)$$

(7) La fonction g définie dans l'une ou l'autre de ces références est légèrement différente: c'est $(\int_0^1 r \log r^{-1} |\partial(P_r f)/\partial r|^2 dr)^{1/2}$. Du fait que $r \log r^{-1}$ et $1 - r$ sont équivalents au voisinage de 1, on montre aisément que si l'une de ces fonctions g satisfait aux inégalités L^p il en est de même de l'autre.

$$\left|\frac{\partial}{\partial r} P_r f\right| \leq C(1-r)^{\delta+1} \sum_{L=1}^{\infty} LA_L^\delta |S_L^{\delta+1} f - S_L^\delta f| r^{L-1},$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial r} P_r f\right|^2 \leq C^2(1-r)^{2\delta+2}\left(\sum_{L=1}^{\infty} LA_L^\delta |S_L^{\delta+1} f - S_L^\delta f|^2 r^{L-1}\right)\left(\sum_{L=1}^{\infty} LA_L^\delta r^{L-1}\right).$$

Comme $\Sigma_{L=1}^{\infty} LA_L^\delta r^{L-1} = (\delta+1)(1-r)^{-\delta-2}$,

$$\int_0^1 \left|\frac{\partial}{\partial r} P_r f\right|^2 (1-r)\, dr \leq C^2 \int_0^1 (1-r)^{\delta+1} \sum_{L=1}^{\infty} LA_L^\delta |S_L^{\delta+1} f - S_L^\delta f|^2 r^{L-1}\, dr$$

$$\leq C^2 \sum_L L^{-1} |S_L^{\delta+1} f - S_L^\delta f|^2$$

puisque $\int_0^1 (1-r)^{\delta+1} r^{L-1}\, dr = O(L^{-\delta-2}) = O(L^{-2}(A_L^\delta)^{-1})$.

Plutôt que la première inégalité du Théorème (4.1), nous allons démontrer le théorème suivant, dont elle est un cas particulier:

Théorème (4.3). *Soit ν_k une suite de constantes positives telles que $\sup_{L \geq 1} L^{-1} \Sigma_{k=1}^L \nu_k = M < \infty$ et soit*

$$g_\delta^*(f) = \left(\sum_{L=1}^{\infty} |S_L^{\delta+1} f - S_L^\delta f|^2 L^{-1} \nu_L\right)^{1/2}.$$

Sous les hypothèses du Théorème (4.1), *il existe une constante A_p ne dépendant pas de la suite ν_k telle que, pour toute fonction $f \in L^p(\Sigma_n)$, $\|g_\delta^*(f)\|_p \leq MA_p \|f\|_p$.*

Le Théoréme (4.3) a été démontré par Muckenhoupt et Stein [17] dans le cas $\delta = 0$, et sa démonstration suit un schéma bien connu (voir [25, Chapitre 15]). Le fait que $\delta \neq 0$ entraine certaines complications et nécessite la démonstration de deux lemmes combinatoires:

Lemme (4.4). *Soit $\delta \geq 0$, u_k une suite de nombres complexes, $s_L^\delta = (A_L^\delta)^{-1} \Sigma_{l=0}^L A_{L-l}^\delta u_l$ et $\sigma_L^\delta = (A_L^\delta)^{-1} \Sigma_{l=0}^L A_{L-l}^\delta r^l u_l$, où $1 - 1/L \leq r < 1$. Alors s_L^δ peut s'écrire sous la forme*

$$s_L^\delta = r^{-L} \sigma_L^\delta + \sum_{l=0}^{L-1} a_{l,L}^\delta \sigma_l^\delta$$

avec $a_{l,L}^\delta = O(1-r)$.

$\Sigma_{L=0}^{\infty} A_L^\delta s_L^\delta w^L = (1-w)^{-\delta-1} \Sigma_{L=0}^{\infty} u_L w^L$ par définition des s_L^δ. Donc

$$\sum_{L=0}^{\infty} A_L^\delta s_L^\delta w^L = (1-w)^{-\delta-1}\left(1-\frac{w}{r}\right)^{\delta+1} \sum_{L=0}^{\infty} A_L^\delta \sigma_L^\delta \left(\frac{w}{r}\right)^L.$$

$$A_L^\delta s_L^\delta = \sum_{l=0}^{L} A_l^\delta r^{-l} \sigma_l^\delta \left(\sum_{k+j=L-l} A_k^\delta A_j^{-\delta-2} r^{-j} \right).$$

Si $l = L$, $\Sigma_{k+j=L-l} A_k^\delta A_j^{-\delta-2} r^{-j} = 1$.

Si $l = L-1$, $\Sigma_{k+j=L-l} A_k^\delta A_j^{-\delta-2} r^{-j} = A_1^\delta + A_1^{-\delta-2} r^{-1} = (\delta+1)(1-1/r)$.

Nous allons montrer que, si $2 \le M \le L$, $\Sigma_{j=0}^M A_{M-j}^\delta A_j^{-\delta-2} r^{M-j} = O(1-r)$ ce qui entrainera le lemme puisque $r^{-L} \le (1-1/L)^{-L} \le e$. Mais $\Sigma_{j=0}^J A_j^\alpha = A_J^{\alpha+1}$, et $A_k^\alpha r^k - A_{k-1}^\alpha r^{k-1} = r^k A_k^{\alpha-1} - (1-r) r^{k-1} A_{k-1}^\alpha$. Après une sommation par parties, on obtient: $\Sigma_{j=0}^M A_{M-j}^\delta A_j^{-\delta-2} r^{M-j} = \Sigma_{j=0}^M A_{M-j}^{\delta-1} A_j^{-\delta-1} r^{M-j} - (1-r)\Sigma_{j=0}^{M-1} A_{M-j-1}^\delta A_j^{-\delta-1} r^{M-j-1}$. Soit k l'entier tel que $k-1 < \delta+1 \le k$. Après k sommations par parties, on obtient des sommes de termes de la forme:

$$(1-r)^b \sum_{j=0}^{M-b} A_{M-b-j}^{\delta-k+b} A_j^{-\delta-2+k} r^{M-b-j}, \qquad b = 0, 1, \cdots, k,$$

dont nous allons montrer que chacune est $O(1-r)$.

Soit d'abord $b = 0$: comme $M \ge 2$, $\Sigma_{j=0}^M A_{M-j}^{\delta-k} A_j^{-\delta-2+k} = A_M^{-1} = 0$.

Le terme étudié est donc égal à $\Sigma_{j=0}^M A_{M-j}^{\delta-k} A_j^{-\delta-2+k}(r^{M-j}-1)$ qui est majoré en module par $A(1-r)\Sigma_{j=0}^{M-1}(M-j)^{\delta-k+1} j^{-\delta-2+k} = O(1-r)$. Soit maintenant $b \ge 1$: $\Sigma_{j=0}^{M-b} A_{M-b-j}^{\delta-k+b} A_j^{-\delta-2+k} = A_{M-b}^{b-1} = O(M^{b-1})$. Donc

$$\begin{aligned}(1-r)^b &\sum_{j=0}^{M-b} A_{M-b-j}^{\delta-k+b} A_j^{-\delta-2+k} r^{M-b-j} \\ &\le A\left[(1-r)^b M^{b-1} + (1-r)^{b+1}\sum_{j=0}^{M-b}(M-b-j)^{\delta-k+b+1} j^{-\delta-2+k}\right] \\ &= O(1-r).\end{aligned}$$

Lemme (4.5). *Soit* $\delta \ge 0$, u_k *une suite de nombres complexes,* $s_L^\delta = (A_L^\delta)^{-1}\Sigma_{l=0}^L A_{L-l}^\delta u_l$, *et* $\sigma_L^\delta = (A_L^\delta)^{-1}\Sigma_{l=0}^L A_{L-l}^\delta r^l u_l$, *où* $0 < r < 1$. *Alors* σ_L^δ *peut s'écrire sous la forme*:

$$\sigma_L^\delta = \sum_{l=0}^{L} b_{l,L}^\delta s_l^\delta \quad où \quad \sum_{l=0}^{L} |b_{l,L}^\delta| = O(1).$$

On montre comme dans le Lemme (4.4) que

$$A_L^\delta \sigma_L^\delta = \sum_{l=0}^{L} A_l^\delta s_l^\delta r^l \sum_{j=0}^{L-l} A_{L-l-j}^\delta A_j^{-\delta-2} r^j,$$

si $l = L$, $\sum_{j=0}^{L-l} A_{L-l-j}^{\delta} A_j^{-\delta-2} r^j = 1$, si $l = L-1$, $\sum_{j=0}^{L-l} A_{L-l-j}^{\delta} A_j^{-\delta-2} r^j = (\delta+1)(1-r)$. Soit $M \geq 2$, $k-1 < \delta \leq k$.

$$\sum_{j=0}^{M} A_{M-j}^{\delta} A_j^{-\delta-2} r^j = \sum_{h=0}^{k} \alpha_h (1-r)^h r^h \sum_{j=0}^{M-h} A_{M-j-h}^{\delta-k+h} A_j^{-\delta-2+k} r^j.$$

Si $h = 0$,

$$\left| \sum_{j=0}^{M} A_{M-j}^{\delta-k} A_j^{-\delta-2+k} r^j \right| \leq A(1-r) \sum_{j=0}^{M} (M-j)^{\delta-k} j^{-\delta-1+k} = O(1-r).$$

Si $1 \leq h \leq k-1$,

$$(1-r)^h r^h \left| \sum_{j=0}^{M-h} A_{M-j}^{\delta-k+h} A_j^{-\delta-2+k} r^j \right|$$

$$\leq A(1-r)^{h+1} \sum_{j=0}^{M-h} (M-h-j)^{\delta-k+h} j^{-\delta-1+k} + (1-r)^h (M-h)^{h-1}.$$

Si $h = k$,

$$\sum_{j=0}^{M-k} A_{M-k-j}^{\delta} A_j^{-\delta-2+k} r^j = (M-k)^{k-1} + \sum_{j=1}^{M-k} A_{M-k-j}^{\delta} A_j^{-\delta-2+k} (r^j - 1).$$

Les termes de cette dernière somme étant tous positifs, elle est majorée par:

$$(M-k)^{\delta} \sum_{j=1}^{M-k} A_j^{-\delta-2-k} (r^j - 1) = (M-k)^{\delta} (1-r)^{\delta+1-k}.$$

En conclusion:

$$|b_{l,L}^{\delta}| \leq A \left(\frac{l}{L}\right)^{\delta} r^l \left[\sum_{h=0}^{\inf(k-1,\, L-l)} (1-r)^{h+1} (L-l-h)^h + (1-r)^k (L-l-k)^{k-1} + (1-r)^{\delta+1} (L-l-k)^{\delta} \right]$$

$$\leq A \left[\sum_{h=0}^{k-1} l^h (1-r)^{h+1} + l^{\delta} (1-r)^{\delta+1} \right]$$

puisque $(l/L)^{\delta} (L-l-k)^{k-1} \leq l^{k-1}$. On en déduit immédiatement que $\sum |b_{l,L}^{\delta}| = O(1)$.

Le lemme suivant est une conséquence du Lemme (4.5) et est bien connu dans le cas où $\delta = 0$ [25, Chapitre 15].

Lemme (4.6). *Soit r_k une suite de nombres compris entre 0 et 1, δ_k une suite de sous-intervalles de $[r_k, 1[$. Sous les hypothèses du Théorème (4.1), il* *existe une constante* A_p *indépendante des suites* r_k *et* δ_k *telle que, pour toute suite de fonctions* f_k *et toute suite d'entiers* L_k,

$$\left\|\left(\sum |S^{\delta}_{L_k} P_{r_k} f_k|^2\right)^{1/2}\right\|_p \leq A_p \left\|\left(\sum \frac{1}{|\delta_k|} \int_{\delta_k} |P_r f_k|^2 dr\right)^{1/2}\right\|_p .$$

Il suffit de montrer que, pour toutes suites f_k et L_k,

$$\left\|\left(\sum |S^{\delta}_{L_k} P_{r_k} f_k|^2\right)^{1/2}\right\|_p \leq A_p \left\|\left(\sum |f_k|^2\right)^{1/2}\right\|_p ,$$

l'inégalité précédente s'en déduisant en approchant l'intégrale par des sommes de Riemann. Mais

$$|S^{\delta}_{L_k} P_{r_k} f_k|^2 \leq A \sum_{l=0}^{L_k} |b^{\delta}_{l,\,L_k}|\,|S^{\delta}_l f_k|^2,$$

$$\left\|\left(\sum |S^{\delta}_{L_k} P_{r_k} f_k|^2\right)^{1/2}\right\|_p \leq A_p \left\|\left(\sum_k \sum_{l=0}^{L_k} |b^{\delta}_{l,\,L_k}|\,|f_k|^2\right)^{1/2}\right\|_p \leq A'_p \left\|\left(\sum_k |f_k|^2\right)^{1/2}\right\|_p .$$

Revenons à la démonstration du Théorème (4.3). On peut toujours supposer que $L \leq \sum_{k=1}^{L} \nu_k \leq 2L$. En effet, si on a démontré le théorème dans ce cas, on l'aura démontré pour $\nu_k \equiv 1$, puis pour $M \leq 1$, la suite $\nu_k + 1$ satisfaisant alors à cette condition, et donc pour toute suite ν_k.

Posons $\mu_1 = 1$, $\mu_L = 1 + \sum_{l=1}^{L-1} \nu_l$ si $L > 1$, $r_L = 1 - 1/\mu_L$. r_L satisfait aux hypothèses du Lemme (4.4). Or, si $f_L = P_{r_L} f$,

$$S^{\delta+1}_L f - S^{\delta}_L f \sim L^{-1}(A^{\delta}_L)^{-1} \sum_{k=0}^{L} k A^{\delta}_{L-k} H_k f,$$

$$S^{\delta+1}_L f_L - S^{\delta}_L f_L \sim L^{-1}(A^{\delta}_L)^{-1} \sum_{k=0}^{L} k A^{\delta}_{L-k} r^k_L H_k f,$$

si bien que, en vertu du Lemme (4.4) et de l'inégalité de Schwarz,

$$|S^{\delta+1}_L f - S^{\delta}_L f|^2 \leq A\left(|S^{\delta+1}_L f_L - S^{\delta}_L f_L|^2 + \frac{L}{\mu^2_L} \sum_{l=1}^{L-1} l^2/L^2 |S^{\delta+1}_l f_L - S^{\delta}_l f_L|^2\right).$$

Montrons tout d'abord que

$$\left\|\left(\sum_{L=1}^{\infty} L^{-1} |S^{\delta+1}_L f_L - S^{\delta}_L f_L|^2 \nu_L\right)^{1/2}\right\|_p \leq A_p \|g(f)\|_p :$$

$S^{\delta+1}_l f_L - S^{\delta}_l f_L \sim l^{-1} S^{\delta}_l(\partial P_{r_L} f/\partial r)$, donc, en vertu du Lemme (4.6),

$$\left\|\left(\sum_{L=1}^{\infty} L^{-1} |S^{\delta+1}_L f_L - S^{\delta}_L f_L|^2 \nu_L\right)^{1/2}\right\|_p \leq A_p \left\|\left(\sum \frac{\nu_L}{L^3} \frac{1}{r_{L+1} - r_L} \int_{r_L}^{r_{L+1}} \left|\frac{\partial}{\partial r} P_r f\right|^2 dr\right)^{1/2}\right\|_p .$$

Pour obtenir l'inégalité cherchée, il suffit de remarquer que $r_{L+1} - r_L = \nu_L/\mu_L\mu_{L+1}$, et $1/\mu_{L+1} = 1 - r_{L+1} < 1 - r$, si $r \in [r_L, r_{L+1}]$. De même:

$$\left\| \left(\sum_L \frac{\nu_L}{\mu_L^2} \sum_{l=1}^{L-1} l^2/L^2 |S_l^{\delta+1} f_L - S_l^\delta f_L|^2 \right)^{1/2} \right\|_p$$

$$\leq A_p \left\| \left(\sum_L \frac{\nu_L}{\mu_L^2} \sum_{l=1}^{L-1} L^{-2} \frac{1}{r_{L+1} - r_L} \int_{r_L}^{r_{L+1}} \left| \frac{\partial}{\partial r} P_r f \right|^2 dr \right)^{1/2} \right\|_p$$

$$\leq A_p \left\| \left(\sum_L L^{-1} \frac{\mu_{L+1}^2}{\mu_L} \int_{r_L}^{r_{L+1}} \left| \frac{\partial}{\partial r} P_r f \right|^2 (1-r)\, dr \right)^{1/2} \right\|_p \leq A_p \|g(f)\|_p$$

puisque $\mu_{L+1}/\mu_L \leq 2$.

Théorème (4.7). *Sous les hypothèses du Théorème (4.1), et sous l'hypothèse supplémentaire que δ est entier, si la suite μ_j satisfait aux conditions*:

(A_0) $\sup_j |\mu_j| \leq M < \infty$,

(A_k) $\sup_j 2^{j(k-1)} \sum_{l=2^j}^{2^{j+1}} |\Delta^k \mu_l| \leq M < \infty$, *avec* $k = \delta + 1$,

alors μ_j définit un multiplicateur zonal de $L^p(\Sigma_n)$: il existe une constante A_p ne dépendant pas de M telle que, pour toute fonction $f \in L^p(\Sigma_n)$, $\|\sum_{j=0}^\infty \mu_j H_j f\|_p \leq MA_p \|f\|_p$.

Posons $F = \sum_{j=0}^\infty \mu_j H_j f$. Il suffit de montrer que

$$g_\delta(F) \leq A\left(\sum |S_L^{\delta+1} f - S_L^\delta f|^2 \nu_L L^{-1} \right)^{1/2},$$

où ν_L est une suite convenable. On peut toujours supposer $M = 1$. La démonstration repose sur le lemme suivant:

Lemme (4.8). *Soit δ un entier positif ou nul, u_k une suite de nombres complexes, $s_L^\delta = (A_L^\delta)^{-1} \sum_{l=0}^L A_{L-l}^\delta u_l$, $r_L^\delta = (A_L^\delta)^{-1} \sum_{l=0}^L A_{L-l}^\delta \mu_l u_l$, la suite μ_l étant supposée satisfaire les conditions (A_0) et $(A_{\delta+1})$ avec $M = 1$. Alors r_L^δ peut s'écrire sous la forme: $r_L^\delta = \mu_L s_l^\delta + \sum_{l=0}^{L-1} c_{l,L}^\delta s_l^\delta$, avec $c_{l,L}^\delta = O(\sum_{k=1}^{\delta+1} l^{k-1} |\Delta^k \mu_l|)$.*

Remarquons tout d'abord que l'hypothèse sur μ_j entraine que

$$\sum_{l=0}^L l^k |\Delta^k \mu_l| = O(L), \quad k = 0, 1, 2, \cdots, \delta + 1.$$

$$\sum_L A_L^\delta r_L^\delta w^L = (1-w)^{-\delta-1} \sum_l \mu_l w^l u_l = (1-w)^{-\delta-1} \sum_l \Delta^{\delta+1}(\mu_l w^l) A_l^\delta s_l^\delta.$$

$$\Delta^{\delta+1}(\mu_l w^l) = \sum_{k=0}^{\delta+1} A_k^{-\delta-2} \Delta^k \mu_l \Delta^{\delta+1-k} w^{l+k} = \sum_{k=0}^{\delta+1} A_k^{-\delta-2} \Delta^k \mu_l w^{l+k} (1-w)^{\delta+1-k}.$$

$$A_L^\delta \tau_L^\delta = \sum_{l=0}^{L} A_l^\delta s_l^\delta \sum_{k+j=L-l;\, k\le \delta+1} \Delta^k \mu_l A_k^{-2-\delta} A_j^{k-1}.$$

$\Sigma_{k+j=L-l} A_k^{-\delta-2} A_j^{k-1} \Delta^k \mu_l = \mu_l$ si $l = L$. Si $l \le L-1$,

$$\left| \sum_{k+j=L-l;\, k\le \delta+1} A_k^{-\delta-2} A_j^{k-1} \Delta^k \mu_l \right| \le A \sum_{k=1}^{\delta+1} (L-l)^{k-1} |\Delta^k \mu_l|.$$

Donc $|c_{l,L}^\delta| \le A l^\delta L^{-\delta} \Sigma_{k=1}^{\delta+1} (L-l)^{k-1} |\Delta^k \mu_l| \le A\, \Sigma_{k=1}^{\delta+1} l^{k-1} |\Delta^k \mu_l|$.

Revenons à la démonstration du théorème.

$$|g_\delta(F)|^2 \le \sum_L |S_L^{\delta+1} f - S_L^\delta f|^2 L^{-1} + A \sum_L L^{-2} \sum_{l=0}^{L-1} |S_l^{\delta+1} f - S_l^\delta f|^2 l |c_{l,L}^\delta|.$$

$$\le \sum_L |S_L^{\delta+1} f - S_L^\delta f|^2 L^{-1} + A\left(\sum_l |S_l^{\delta+1} f - S_l^\delta f|^2 \frac{\nu_l}{l}\right)$$

avec $\nu_l = \Sigma_{k=1}^{\delta+1} l^k |\Delta^k \mu_l|$, du fait que $\Sigma_{l=0}^{L-1} l\, |c_{l,L}^\delta| = O(L)$, et de la majoration sur $c_{l,L}^\delta$.

Théorème (4.9). (1) *Soit* μ_j *une suite satisfaisant aux conditions:*

(A_0) $\sup_j |\mu_j| \le M < \infty$,

(A_k) $\sup_j 2^{j(k-1)} \Sigma_{l=2^j}^{2^{j+1}} |\Delta^k \mu_l| \le M < \infty$,

avec $k = (n+1)/2$ *si* n *est impair,* $k = (n+2)/2$ *si* n *est pair. La suite* μ_j *définit un multiplicateur de* $L^p(\Sigma_n)$ *pour tout* $p > 1$, *dont la norme est bornée par* MA_p, *où* A_p *ne dépend pas de* μ_j.

(2) *Soit* μ_j *une suite satisfaisant aux conditions* (A_0) *et* (A_k), *où* $2 \le k < (n+1)/2$. *Elle définit un multiplicateur de* $L^p(\Sigma_n)$ *pour* $|1/p - 1/2| < (k-1)/(n-1)$.

C'est une conséquence immédiate du Théorème (4.7), du Théorème (3.6) et du Corollaire (3.7). En (1) est exprimée la condition suffisante de ce type la plus faible pour que μ_j soit un multiplicateur, comme le montre la considération des moyennes de Cesàro (autrement dit la condition (A_k) ne peut être remplacée par (A_{k-1})). Ce n'est sûrement pas le cas pour (2) (voir §5).

Remarque. Le Théorème (4.1) permet également d'énoncer des conditions suffisantes de type Hörmander pour que μ_j soit un multiplicateur, et de généraliser ainsi les résultats de [3] à Σ_n: en effet, en interpolant suivant une idée d'Igari et Kuratsubo [14] entre les deux résultats:

$$\|g_{(n-1)/2}(f)\|_p \le A_p \|f\|_p \quad \text{si } p > 1,$$

$$\|g_\delta(f)\|_2 \le A_2 \|f\|_2 \quad \text{si } \delta > -\tfrac{1}{2},$$

on obtient que

$$\|g_\delta(f)\|_p \leq A_p \|f\|_p \quad \text{si } |1/p - 1/2| < (2\delta + 1)/2n.$$

En utilisant le Lemme (4.8) on en déduit le théorème suivant:

Théorème (4.10). *Soit* μ_j *une suite satisfaisant aux conditions suivantes*:
(B_0) $\sup |\mu_j| < \infty$,
(B_k) $\sup 2^{j(2k-1)} \Sigma_{2^j}^{2^{j+1}} |\Delta^k \mu_j|^2 < \infty$.
Alors μ_j *définit un multiplicateur de* $L^p(\Sigma_n)$ *pour les valeurs de* p *supérieures à* 1 *telles que* $|1/p - 1/2| < (2k - 1)/2n$ $(k \geq 1)$.

Sauf lorsque $k > (n + 1)/2$, les conditions des Théorèmes (4.9) et (4.10) ne sont pas comparables. Remarquons toutefois que (A_0) et (A_k) entrainent (B_{k-1}).

Le théorème de passage de Σ_n à $\mathbf{R}^n$ permet de déduire immédiatement des théorèmes (4.9) et (4.10) leurs analogues sur $\mathbf{R}^n$.

Théorème (4.11). *Soit* k *un entier supérieur ou égal à* 1, m *une fonction bornée sur* $\mathbf{R}^+$ *de classe* $\mathcal{C}^k$, *qui satisfait à la condition*:

$$\sup_j \int_{2^j}^{2^{j+1}} |m^{(k)}(x)|\, dx \leq A 2^{-j(k-1)}.$$

La fonction m *définit un multiplicateur radial de* $L^p(\mathbf{R}^n)$ *pour* $|1/p - 1/2| < (k - 1)/(n - 1)$, $p > 1$.

Théorème (4.12). *Soit* k *un entier supérieur ou égal à* 1, m *une fonction bornée sur* $\mathbf{R}^+$ *de classe* $\mathcal{C}^k$, *qui satisfait à la condition*:

$$\sup_j \int_{2^j}^{2^{j+1}} |m^{(k)}(x)|^2\, dx \leq A 2^{-j(2k-1)}.$$

La fonction m *définit un multiplicateur radial de* $L^p(\mathbf{R}^n)$ *pour* $|1/p - 1/2| < (2k - 1)/2n$.

En effet, les suites m_l^ϵ, définies par $m_l^\epsilon = m(\epsilon l)$, satisfont uniformément aux hypothèses des Théorèmes (4.9) et (4.10) respectivement: il suffit de remarquer que $|\Delta^k m_l^\epsilon| \leq \epsilon^{k-1} \int_{\epsilon l}^{\epsilon(l+k)} |m^{(k)}(x)|\, dx$. Le Théorème (4.12), dans le cas où $k = 1$, est dû à Igari et Kuratsubo [14].

5. **Etude des sommes de Cesàro en dessous de l'indice critique** $(n \geq 2)$. Il est bien connu que si $\delta > (n - 1)/2$, alors les sommes de Cesàro d'indice δ sont uniformément bornées dans $L^p(\Sigma_n)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$, et par suite $S_L^\delta f \to f$ dans L^p $(1 \leq p < +\infty)$. Si maintenant $\delta \leq (n - 1)/2$, on ne peut plus espérer un résultat positif pour tout indice p. En effet:

Théorème (5.1). (i) *Soit* $\delta = 0$; *il existe, pour tout* $p \neq 2$, *une fonction* $f \in L^p(\Sigma_n)$, *telle que* $S_L^0 f$ *ne converge pas dans* $L^p(\Sigma_n)$.

(ii) *Soit* $0 < \delta \leq (n - 1)/2$; *il existe, pour tout* p, $1 \leq p \leq 2n/(n + 1 + 2\delta)$ *ou*

$p \geq 2n/(n-1-2\delta)$, *une fonction* $f \in L^p(\Sigma_n)$, *telle que* $S_L^\delta f$ *ne converge pas dans* $L^p(\Sigma_n)$.

En effet, la convergence dans L^p de $(S_L^\delta f)_{L \geq 0}$ pour toute $f \in L^p$ est équivalente au fait que les opérateurs $(S_L^\delta)_{L \geq 0}$ sont uniformément bornés dans L^p. Le théorème résulte alors du Théorème (1.1) et des résultats correspondants pour $\mathbf{R}^n$ (voir [7], [21]). Remarquons d'ailleurs que seul le résultat (i) est réellement nouveau; en effet, pour (ii) on peut trouver une fonction zonale f, telle que $S_L^\delta f$ ne converge pas dans $L^p(\Sigma_n)$ [1].

Ces résultats amènent à la conjecture naturelle que dans l'intervalle complémentaire en p, les sommes de Cesàro sont uniformément bornées. Nous montrons ici l'analogue du résultat de Fefferman pour $\mathbf{R}^n$ (voir [6]), id est la réponse à la conjecture précédente est positive si $\delta > (n-1)/4$.

Théorème (5.2). *Soit* δ, $(n-1)/4 < \delta \leq (n-1)/2$; *pour tout* p, $2n/(n+1+2\delta) < p < 2n/(n-1-2\delta)$, *il existe une constante* A_p *telle que* $\|S_L^\delta f\|_p \leq A_p \|f\|_p$.

La démonstration repose sur un lemme, analogue du lemme de restriction de [6].

Lemme (5.3). *Soit* p, $1 \leq p < 4n/(3n+1)$; *alors* $\|H_k f\|_2 \leq C \cdot k^{n(1/p-(n+1)/2n)} \|f\|_p$.

Remarque. On peut, a priori, penser à interpoler entre les deux inégalités

$$\|H_k f\|_2 \leq C\|f\|_2 \quad \text{et} \quad \|H_k f\|_2 \leq C \cdot \|Z_k\|_2 \cdot \|f\|_1,$$

notant que $\|Z_k\|_2 = O(k^{(n-1)/2})$. Mais l'inégalité obtenue est plus mauvaise que celle du lemme.

Démonstration. $\|H_k f\|_2^2 = \int_{\Sigma_n} (H_k f)(\xi)\overline{f(\xi)}\,d\sigma(\xi) \leq \|f\|_p \cdot \|Z_k * f\|_{p'} \leq \|f\|_p \cdot \|f\|_p \|Z_k\|_q$, où $1/p' = 1/p + 1/q - 1$ d'après les inégalités de Hölder et de Young. Notons que $q = p'/2 > 2n/(n-1) = 2 + 1/\lambda$. Estimons maintenant $\|Z_k\|_q$; rappelons que ${}^b\mathbf{Z}_k = ((k+\lambda)/\lambda)P_k^\lambda$, et que P_k^λ satisfait aux estimations suivantes (voir [22, p. 170]).

$$|P_k^\lambda(\cos\theta)| \leq \begin{cases} C \cdot \theta^{-\lambda} k^{\lambda - 1} & \text{si } 1/k \leq \theta \leq \pi/2, \\ k^{2\lambda - 1} & \text{si } 0 \leq \theta \leq 1/k. \end{cases}$$

De sorte que

$$\int_{\Sigma_n} |Z_k(\xi)|^q\, d\sigma(\xi) = O(k^q) \int_0^\pi |P_k^\lambda(\cos\theta)|^q (\sin\theta)^{2\lambda}\, d\theta$$

$$= O(k^q)\left(\int_0^{1/k} k^{(2\lambda-1)q}\theta^{2\lambda}\, d\theta + \int_{1/k}^{\pi/2} k^{(\lambda-1)q}\theta^{-\lambda q}\theta^{2\lambda}\, d\theta\right)$$

$$= O(k^{2\lambda q - 2\lambda - 1}), \quad \text{puisque } \lambda q > 2\lambda + 1.$$

D'où $\|Z_k\|_q \leq C \cdot k^{2n(1/p-(n+1)/2n)}$.

Cela étant, soit donc δ, $(n-1)/4 < \delta \leq (n-1)/2$, et posons $p_0 = 4n/(3n+1)$,

$p_\delta = 2n/(n+1+2\delta)$, de sorte que $p_\delta < p_0$; soit donc p, $p_\delta < p < p_0$; nous devons montrer que $\|S_L^\delta f\|_p \le A_p \|f\|_p$.

On va d'abord retrancher à S_L^δ une partie régulière; pour ceci soit θ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, satisfaisant

(i) $0 \le \theta \le 1$,

(ii) $\theta = 0$ si $t \le 2/3$ ou si $t \ge 2$,

(iii) $\theta = 1$ si $3/4 \le t \le 1$.

Si ϕ est une fonction zonale sur Σ_n, nous noterons dans ce paragraphe $\hat{\phi}(k)$ ses "coefficients de Fourier", id est $\phi = \Sigma_0^{+\infty}\hat{\phi}(k)Z_k$. En particulier $s_L^\delta = \Sigma_0^L \hat{s}_L^\delta(k)Z_k$, avec $\hat{s}_L^\delta(k) = A_{L-k}^\delta / A_L^\delta$. On décompose alors s_L^δ à l'aide de θ en posant $s_L^\delta = s_L' + s_L''$, où $\hat{s}_L'(k) = \theta(k/L)\hat{s}_L^\delta(k)$; de sorte que $S_L^\delta = S_L' + S_L''$, où S_L' contient la singularité véritable de S_L^δ et S_L'' n'est qu'un terme trivial; montrons en effet que $\|S_L'' f\|_p \le C \cdot \|f\|_p$. Pour ceci on évalue les différences successives de $\hat{s}_L''(k)$, et on va voir que le théorème de multiplicateurs (4.9) fournit le résultat avec une constante uniforme; en effet

(i) $|\Delta^r \theta(k/L)| \le C \cdot L^{-r}$,

(ii) $|\Delta^s A_{L-k}^\delta| / A_L^\delta \le C \cdot L^{-s}$, dès lors que $L - k \ge L/4$.

(i) résulte de la formule des accroissements finis, et (ii) de la formule

$$\begin{aligned}\Delta^s A_{L-k}^\delta &= \Gamma(L-k+\delta+1-q)/\Gamma(L-k+1)\Gamma(\delta-q+1) \\ &\qquad \text{si } \delta - q + 1 \text{ n'est pas un entier négatif,} \\ &= 0 \quad \text{sinon,}\end{aligned}$$

qui se démontre par récurrence.

La formule de Leibniz montre alors que $|\Delta^m s_L''(k)| \le C/k^m$.

Venons-en à l'estimation de $\|S_L' f\|_p$. Fixons L, et soit J le premier entier positif tel que $2^J/L \ge \pi$. Choisissons maintenant des fonctions $(\phi_j^L)_{0 \le j \le J}$, telles que

(i) ϕ_j^L est zonale, $0 \le \phi_j \le 1$,

(ii) $\Sigma \phi_j^L = 1$,

(iii) le support de ϕ_0^L est contenu dans la boule $B(1, 2/L)$, le support de ϕ_j^L est contenu dans la "calotte" $\{\xi \,|\, 2^{j-1}/L < d(1, \xi) \le 2^{j+1}/L\}$.

(iv) ϕ_j^L est de classe C^∞, et pour tout opérateur différentiel D de degré M, $|D\phi_j^L| \le C(2^j/L)^{-M}$, où la constante C ne dépend ni de j, ni de L.

Cette partition de l'unité permet de décomposer s_L' en $\Sigma_j s_L^j$, où $s_L^j = \phi_j \cdot s_L'$. On va montrer que $\|s_L^j * f\|_p \le C \cdot 2^{-\epsilon j}\|f\|_p$, avec un nombre $\epsilon > 0$, dont la valeur sera précisée en cours de démonstration. Fixons maintenant j $(0 \le j \le J)$, et construisons par récurrence un recouvrement de Σ_n par des boules $B(\xi_i, 2^j/L)$, telles que $d(\xi_i, \xi_{i'}) \ge 2^j/L$ dès que $i \ne i'$. Remarquons tout de suite que ces boules (ainsi que les boules de rayon, disons, triple) sont N-disjointes (en ce sens que l'intersection de plus de N boules distinctes est vide), où N ne dépend que de la dimension n (ce résultat tient à la nature homogène de l'espace Σ_n, au sens de [5])

Soit maintenant (ψ_i) une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement, et $f = \Sigma\psi_i f = \Sigma f_i$ la décomposition correspondante de f. Alors

$$\|S_L^j f\|_p^p = \int \Big| \sum_i s_L^j * f_i \Big|^p (\xi)\, d\xi \leq N^{p-1} \sum_i \int |s_L^j * f_i|^p(\xi)\, d\xi,$$

puisque $s_L^j * f_i$ a son support dans la boule $B(\xi_i, 3 \cdot 2^j/L)$. On voit alors facilement qu'il suffit de démontrer que $\|s_L^j * f\|_p \leq C \cdot 2^{-\epsilon j}\|f\|_p$ lorsque f a son support contenu dans une boule de rayon $2^j/L$. On peut toujours supposer que cette boule est centrée au pôle nord, puisque S_L^j commute aux rotations. Mais alors $s_L^j * f$ a son support dans la boule $B(3 \cdot 2^j/L)$, et par suite $\|S_L^j f\|_p \leq C \cdot (2^j/L)^{n(1/p-1/2)}\|S_L^j f\|_2$. Par suite, tout revient à montrer que $\|S_L^j f\|_2 \leq C \cdot (2^j/L)^{-n(1/p-1/2)}2^{-j\epsilon}\|f\|_p$. Or $\|S_L^j f\|_2^2 = \Sigma_0^{+\infty}|\hat{s}_L^j(k)|^2\|H_k f\|_2^2 \leq (\Sigma_0^{+\infty}|\hat{s}_L^j(k)|^2 k^{2\gamma})\|f\|_p^2$, grace au Lemme (5.3), avec $\gamma = n(1/p - (n+1)/2n)$; notons que $\gamma < (n-1)/2$. Majorons d'abord $\Sigma_0^{L/3}|\hat{s}_L^j(k)|^2 k^{2\gamma}$; c'est en fait encore un terme trivial. Rappelons que $s_L^j = \phi_j \cdot s_L'$, de sorte qu'avec des notations évidentes, $s_L^j = (\Sigma\hat{s}_L'(m)Z_m) \cdot (\Sigma\hat{\phi}_j(l)Z_l)$; mais $Z_m Z_l = \Sigma_{|l-m|}^{l+m}\alpha_{m,l}^k Z_k$, où

$$\alpha_{m,l}^k = C_\lambda \cdot \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(g+2\lambda)\Gamma(g-l+\lambda)\Gamma(g-m+\lambda)\Gamma(g-k+\lambda)}{(m+\lambda)(l+\lambda)\Gamma(k+2\lambda)\Gamma(g+\lambda+1)\Gamma(g-l+1)\Gamma(g-m+1)\Gamma(g-k+1)},$$

avec $2g = l + m + k$, la sommation étant faite pour les indices k ayant même parité que $l + m$ (voir [23, p. 504], où la formule pour $\alpha_{m,l}^k$ est donnée avec une légère erreur). On déduit que $\hat{s}_L^j(k) = \Sigma_{|l-m|<k<l+m}\alpha_{m,l}^k \hat{s}_L'(m)\hat{\phi}_j(l)$. On peut toujours supposer $m \geq 2L/3$, grâce au découpage de S_L en $S_L' + S_L''$ effectué au début, et l'on s'intéresse aux valeurs de $k \leq L/3$. A partir de ces conditions, on estime les quantités g, $g - l$, $\cdots$, et on montre que $\alpha_{m,l}^k \leq C_\lambda 1/kL^{2\lambda}$. Par suite $|\hat{s}_L^j(k)| \leq C \cdot L^{2\lambda}\Sigma_{L/3}^{4L/3}|\hat{\phi}_j(l)|$. Il reste à estimer la norme l^1 de la transformée de Fourier de ϕ_j, qui est une fonction très régulière; on utilise le Laplacien Δ sur Σ_n, dont on sait que Z_l est une fonction propre avec une valeur propre en $O(l^2)$. Par suite

$$\sum_{L/3}^{4L/3} |\hat{\phi}_j(l)| \leq C\left(\sum_0^{+\infty} |\hat{\phi}_j(l)|^2 l^{4M} l^{n-1}\right)^{1/2}\left(\sum_{L/3}^{+\infty} l^{-4M} l^{-(n-1)}\right)^{1/2}$$
$$\leq C \cdot \left(\int_{\Sigma_n} |\Delta^M\phi_j|^2(\xi)\, d\sigma(\xi)\right)^{1/2} L^{-2M-n/2+1},$$

où M est un entier suffisamment grand, qu'on choisira dans un instant. Mais, par hypothèse $|\Delta^M\phi_j| \leq C(2^j/L)^{-2M}$, d'après la propriété (iv).

$$\left(\int_{\Sigma_n} |\Delta^M\phi_j|^2(\xi)\, d\sigma(\xi)\right)^{1/2} \leq C \cdot \left(\frac{2^j}{L}\right)^{-2M} \cdot \left(\frac{2^j}{L}\right)^{n/2}.$$

D'où finalement $|\hat{s}_L^j(k)| \leq CL^2(2^j/L)^{-2M}(2^j/L)^{n/2}L^{-2M-n/2+1} \leq C \cdot 2^{j(n/2-M)}$, et finalement $\Sigma_0^{L/3}|\hat{s}_L^j(k)|^2k^{2\gamma} \leq C \cdot L^{2\gamma+1} \cdot 2^{j(n/2-2M)}$; or $2\gamma + 1 = 2n(1/p - 1/2)$; il ne reste plus qu'à choisir M tel que $n/2 - 2M \leq -2n(1/p - 1/2) - \epsilon$. Abordons maintenant la partie réellement significative du problème

$$\sum_{L/3}^{+\infty} |\hat{s}_L^j(k)|^2 l^{2\gamma} \leq C \cdot L^{2\gamma-(n-1)} \sum_0^{+\infty} |\hat{s}_L^j(k)|^2 \|Z_k\|_2^2$$

$$\leq C \cdot L^{2\gamma-(n-1)} \int_{\Sigma_n} |s_L^j(\xi)|^2\, d\sigma(\xi).$$

On utilise les majorations du §2, de sorte que

$$\int_{\Sigma_n} |s_L^j(\xi)|^2\, d\sigma(\xi) \leq \int_{2^{(j-1)}/L}^{2^{(j+1)}/L} L^{2\lambda-2\delta}|\theta|^{-2\lambda-2\delta-2}|\theta|^{2\lambda}\, d\theta$$

$$\leq C \cdot L^{2\lambda-2\delta}\left(\frac{2^j}{L}\right)^{-2\delta-1} = C \cdot L^{2\lambda+1}(2^j)^{-2\delta-1};$$

pour $j = 0,\ J-1,\ J$, on doit utiliser les autres inégalités S_L^δ, mais la majoration obtenue est identique. En définitive, $\Sigma_{L/3}^{+\infty}|\hat{s}_L^j(l)|^2 l^{2\gamma} \leq C \cdot L^{2\gamma+1}(2^j)^{-2\delta-1}$. Notant alors que $p > p_\delta$ entraine $\gamma < \delta$, on pose $\delta = \gamma + \epsilon$, et la majoration devient $\Sigma_{L/3}^{+\infty} |\hat{s}_L^j(l)|^2 l^{2\gamma} \leq C \cdot (2^j/L)^{-2(1/p-1/2)} \cdot 2^{-2j\epsilon}$. D'où la majoration cherchée.

6. **Polynômes ultrasphériques.** Considérons l'intervalle $[0, \pi]$ muni de la distance induite de celle de $\mathbf{R}$, et, sur $[0, \pi]$, la mesure $dm_\beta(\theta) = (\sin\theta)^\beta d\theta$, où β est un nombre réel supérieur à -1. Il est aisé de montrer que m_β satisfait à la propriété d'homogénéité: $m_\beta(S(\theta, r)) \leq Am_\beta(S(\theta, r/2))$, $S(\theta, r)$ désignant ici l'ensemble $\{\phi \in [0, \pi];\ |\theta - \phi| < r\}$.

La fonction maximale $M_\beta f$ de f relativement à la mesure m_β est définie par:

$$M_\beta f(\theta) = \sup_{r>0} \frac{1}{m_\beta(S(\theta, r))} \int_{S(\theta,r)} |f(\phi)|\, dm_\beta(\phi).$$

En vertu du théorème de Fefferman-Stein [8], quels que soient $r > 1$ et $\mu > 1$, il existe une constante $A_{r\mu}$ telle que:

$$\left\|\left(\sum_n |M_\beta f_n|^r\right)^{1/r}\right\|_{L^\mu(dm_\beta)} \leq A_{r\mu}\left\|\left(\sum |f_n|^r\right)^{1/r}\right\|_{L^\mu(dm_\beta)}$$

pour toute suite de fonctions f_n.

Soit maintenant λ un nombre positif fixé une fois pour toutes. Dans la suite M désignera $M_{2\lambda}$, $\|f\|_p$ la norme de f dans $L^p(dm_{2\lambda})$. Soit $1 < p \leq 2$, p' l'exposant conjugué, $\alpha \in\ ]-(2\lambda+1)/p, (2\lambda+1)/p'[$. On notera encore $\|f\|_{p,\alpha}$ la norme de $f(\theta)(\sin\theta)^\alpha$ dans $L^p(dm_{2\lambda})$.

Soit alors $q < p$ tel que $\alpha \in\ ]-(2\lambda+1)/q, (2\lambda+1)/q'[$. Il existe une constante A telle que, pour toute fonction $f \in L^p(dm_{\alpha p+2\lambda})$, $Mf \leq A(M_{\alpha q+2\lambda} f^q)^{1/q}$; en effet

$$\frac{1}{m_{2\lambda}(S(\theta, r))} \int_{S(\theta, r)} |f(\phi)| \sin^{2\lambda}\phi \, d\phi$$

$$\leq \frac{1}{m_{2\lambda}(S(\theta, r))} \left(\int_{S(\theta, r)} |f(\phi)|^q \sin^{\alpha q+2\lambda}\phi \, d\phi\right)^{1/q} \left(\int_{S(\theta, r)} (\sin\phi)^{-\alpha q'+2\lambda} d\phi\right)^{1/q'}$$

$$\leq \frac{A}{(m_{2\lambda+\alpha q}(S(\theta, r)))^{1/q}} \left(\int_{S(\theta, r)} |f(\phi)|^q \sin^{\alpha q+2\lambda}\phi \, d\phi\right)^{1/q} \leq A(M_{\alpha q+2\lambda} f^q)^{1/q}$$

en vertu de l'inégalité élémentaire:

$$\left(\int_{S(\theta, r)} (\sin\phi)^{\alpha q+2\lambda} d\phi\right)^{1/q} \left(\int_{S(\theta, r)} (\sin\phi)^{-\alpha q'+2\lambda} d\phi\right)^{1/q'} \leq A \int_{S(\theta, r)} \sin^{2\lambda}\phi \, d\phi.$$

Appliquons alors le théorème de Fefferman-Stein avec $r = 2/q$, $\mu = p/q$: on obtient:

Lemme (6.1). *Soit* $1 < p < \infty$, $\alpha \in]-(2\lambda+1)/p, (2\lambda+1)/p'[$. *Il existe une constante* $A_{p,\alpha}$ *telle que, pour toute suite de fonctions* f_n, $\|(\Sigma|Mf_n|^2)^{1/2}\|_{p,\alpha} \leq A_{p,\alpha}\|(\Sigma|f_n|^2)^{1/2}\|_{p,\alpha}$.

Soit f une fonction de $L^2(dm_{2\lambda})$. Les fonctions $P_n^\lambda(\cos\theta)$ formant un système orthogonal complet sur $[0, \pi]$ muni de la mesure $dm_{2\lambda}$, f possède un développement: $f(\theta) \sim \Sigma\, a_n P_n^\lambda(\cos\theta)$. Les moyennes de Cesàro d'ordre δ de f sont définies par

$$S_L^\delta f(\theta) = (A_L^\delta)^{-1} \sum_0^L A_{L-l}^\delta a_l P_l^\lambda(\cos\theta),$$

ou encore par

$$S_L^\delta f(\theta) = \int_0^\pi s_L^\delta(\cos\theta, \cos\phi) f(\phi)\, dm_{2\lambda}(\phi)$$

où $s_L^\delta(\cos\theta, \cos\phi) = (A_L^\delta)^{-1}\Sigma_{l=0}^L A_{L-l}^\delta \|P_l^\lambda\|_2^{-2} P_l^\lambda(\cos\theta) P_l^\lambda(\cos\phi)$. En vertu de la formule d'addition

$$P_n^\lambda(\cos\theta) P_n^\lambda(\cos\phi) = c_\lambda \int_0^\pi P_n^\lambda(\cos\Omega) P_n^\lambda(1) \sin^{2\lambda-1} w\, dw$$

où $c_\lambda^{-1} = \int_0^\pi \sin^{2\lambda-1} w\, dw$ et $\cos\Omega = \cos\theta\cos\phi + \cos w \sin\theta\sin\phi$,

$$s_L^\delta(\cos\theta, \cos\phi) = c_\lambda \int_0^\pi s_L^\delta(\cos\Omega) \sin^{2\lambda-1} w\, dw,$$

où $s_L^\delta(\cos\theta) = (A_L^\delta)^{-1}\Sigma_{l=0}^L A_{L-l}^\delta \|P_l^\lambda\|_2^{-2} P_l^\lambda(1) P_l^\lambda(\cos\theta)$ est le noyau de Cesàro étudié dans les paragraphes 2 et 3. Rappelons les majorations obtenues: si $\sigma_L^\delta(\cos\theta) = s_L^\delta(\cos\theta)\chi_{[0,\pi/2]}(\theta)$, $\tau_L^\delta(\cos\theta) = s_L^\delta(\cos\theta) - \sigma_L^\delta(\cos\theta)$,

$$|\sigma_L^\delta(\cos\theta)| \leq AL^{\lambda-\delta}(L^{-2}+|\theta|^2)^{-(\lambda-\delta-1)/2} \quad \text{si } \delta \leq \lambda+1;$$

$$|\sigma_L^\delta(\cos\theta)| \leq AL^{-1}(L^{-2}+|\theta|^2)^{-\lambda-1} \quad \text{si } \delta \geq \lambda+1;$$

$$|r_L^\delta(\cos\theta)| \leq A|\pi-\theta|^{-2\lambda+\delta} \quad \text{si } \delta \leq 2\lambda;$$

$$|r_L^\delta(\cos\theta)| \leq A \quad \text{si } \delta \geq 2\lambda.$$

Posons

$$\sigma_L^\delta(\cos\theta, \cos\phi) = c_\lambda\int_0^\pi \sigma_L^\delta(\cos\Omega)\sin^{2\lambda-1}w\,dw;$$

$$r_L^\delta(\cos\theta, \cos\phi) = c_\lambda\int_0^\pi r_L^\delta(\cos\Omega)\sin^{2\lambda-1}w\,dw.$$

Lemme (6.2). *Il existe une constante A indépendante de L telle que*

(i) $|\sigma_L^\delta(\cos\theta,\cos\phi)| \leq AL^{\lambda-\delta}(L^{-2}+|\theta-\phi|^2)^{-(\lambda-\delta-1)/2}$ si $\delta \leq \lambda+1$;

(ii) $|\sigma_L^\delta(\cos\theta,\cos\phi)| \leq AL^{-1}(L^{-2}+|\theta-\phi|^2)^{-\lambda-1}$ si $\delta \geq \lambda+1$;

(iii) $|\sigma_L^\delta(\cos\theta,\cos\phi)| \leq AL^{\lambda-\delta}(L^{-2}+|\theta-\phi|^2)^{(\lambda-\delta-1)/2}(\sin\theta)^{-\lambda}(\sin\phi)^{-\lambda}$ si $\lambda-1<\delta\leq\lambda+1$;

(iv) $|\sigma_L^\delta(\cos\theta,\cos\phi)| \leq AL^{-1}(L^{-2}+|\theta-\phi|^2)^{-1}(\sin\theta)^{-\lambda}(\sin\phi)^{-\lambda}$ si $\delta\geq\lambda+1$;

(v) $|r_L^\delta(\cos\theta,\cos\phi)| \leq A|\pi-\theta-\phi|^{-2\lambda+\delta}$ si $\delta\leq 2\lambda$;

(vi) $|r_L^\delta(\cos\theta,\cos\phi)| \leq A$ si $\delta\geq 2\lambda$.

Nous allons donner la démonstration de (i) et (iii). Les majorations (ii) et (iv) sont des cas particuliers des majorations (i) et (iii), les majorations (v) et (vi) s'obtiennent de la même manière.

Soit donc $\delta\leq\lambda+1$. $\Omega^2 \geq 4\sin^2\Omega/2 = 2(1-\cos\Omega)$, donc

$$\begin{aligned}\sigma_L^\delta(\cos\Omega) &\leq AL^{\lambda-\delta}(L^{-2}+1-\cos\Omega)^{(-\lambda-\delta-1)/2}\\ &\leq AL^{\lambda-\delta}(L^{-2}+1-\cos(\theta-\phi)+(1-\cos w)\sin\theta\sin\phi)^{(-\lambda-\delta-1)/2}\\ &\leq AL^{\lambda-\delta}(L^{-2}+|\theta-\phi|^2+w^2\sin\theta\sin\phi)^{(-\lambda-\delta-1)/2}\end{aligned}$$

puisque $0<w/2<\pi/2$, $0<|\theta-\phi|/2<\pi/2$.

$$\sigma_L^\delta(\cos\theta,\cos\phi) = c_\lambda\int_0^{\pi/2}\cdots + c_\lambda\int_{\pi/2}^\pi\cdots = \mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2.$$

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_1 &\leq AL^{\lambda-\delta}\int_0^{\pi/2}(L^{-2}+|\theta-\phi|^2+w^2\sin\theta\sin\phi)^{(-\lambda-\delta-1)/2}w^{2\lambda-1}\,dw\\ &= AL^{\lambda-\delta}(\sin\theta)^{-\lambda}(\sin\phi)^{-\lambda}(L^{-2}+|\theta-\phi|^2)^{(\lambda-\delta-1)/2}\\ &\quad\cdot\int_0^T(1+w^2)^{(-\lambda-\delta-1)/2}w^{2\lambda-1}dw\end{aligned}$$

$$\text{où } T = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\sin\theta\sin\Phi}{L^{-2}+|\theta-\Phi|^2}\right).$$

Lorsque $\delta > \lambda - 1$, $\int_0^\infty (1 + w^2)^{(-\lambda-\delta-1)/2} w^{2\lambda-1}\, dw < \infty$, d'où la majoration de type (iii) pour I_1. D'autre part $\int_0^T (1 + w^2)^{(-\lambda-\delta-1)/2} w^{2\lambda-1}\, dw \leq AT^{2\lambda}$, d'où la majoration de type (i) pour I_1. L'intégrale I_2 se traite de manière analogue.

Lemme (6.3). *Soit $\delta > \lambda$. Il existe une constante A, indépendante de f, telle que* $\sup_L |S_L^\delta f(\theta)| \leq A(Mf(\theta) + Mf(\pi - \theta))$.

Nous allons montrer que $|\int_0^\pi \sigma_L^\delta(\cos\theta, \cos\phi) f(\phi)\, d\phi| \leq AMf(\theta)$, tandis que $|\int_0^\pi \tau_L^\delta(\cos\theta, \cos\phi) f(\phi)\, d\phi| \leq AMf(\pi - \theta)$. Posons

$$M^*f(\theta) = \sup_{h \neq 0;\, 0 \leq \theta + h \leq \pi} \frac{\int_\theta^{\theta+h} |f(\phi)|\, dm_{2\lambda}(\phi)}{\int_\theta^{\theta+h} dm_{2\lambda}(\phi)}.$$

Un calcul élémentaire permet de montrer que M^*f est, à une constante indépendante de f près, majorée par Mf. Or, pour montrer l'inégalité $|\int_0^\pi \sigma_L^\delta(\cos\theta, \cos\phi) f(\phi)\, d\phi| \leq Am^*f(\theta)$, il suffit de montrer l'existence d'une fonction positive $k_L(\phi)$ qui majore $\sigma_L^\delta(\cos\theta, \cos\phi)$, soit croissante dans $[0, \theta[$, décroissante dans $]\theta, \pi]$, et telle que

$$k_L(0) \leq A\left(\int_0^\theta \sin^{2\lambda}\phi\, d\phi\right)^{-1}, \qquad k_L(\pi) \leq A\left(\int_\theta^\pi \sin^{2\lambda}\phi\, d\phi\right)^{-1},$$

$$\int k_L(\phi) \sin^{2\lambda}\phi\, d\phi \leq A,$$

comme le montre une intégration par parties élémentaire, semblable à celle qui a été faite dans le §3. Supposons $\delta \leq \lambda + 1$, $\theta \leq \pi/2$, le cas général s'en déduisant immédiatement. Si $\theta \leq 2/L$, on peut prendre $k_L(\phi) = AL^{\lambda-\delta}(L^{-2} + |\theta - \phi|^2)^{(-\lambda-\delta-1)/2}$. Si $\theta > 2/L$, on peut prendre

$$k_L(\phi) = AL^{\lambda-\delta}(L^{-2} + |\theta - \phi|^2)^{(\lambda-\delta-1)/2}(\sin\theta)^{-2\lambda} \quad \text{si } \theta/2 \leq \phi \leq 3\theta/2,$$

$$k_L(\phi) = A' L^{\lambda-\delta} |\theta - \phi|^{-\lambda-\delta-1} \quad \text{sinon.}$$

L'inégalité $|\int_0^\pi \tau_L^\delta(\cos\theta, \cos\phi) f(\phi)\, d\phi| \leq AM^*f(\pi - \theta)$ s'obtient de manière plus élémentaire encore.

Théorème (6.4). *Soit $\delta \geq 0$. Si $p > 1$ et si $|1/p - 1/2| \leq (\delta + \tfrac{1}{2})/(2\lambda + 1)$, il existe une constante A_p telle que, pour toute fonction $f \in L^p(dm_{2\lambda})$, $\|\sup_L |S_L^\delta f|\|_p \leq A_p \|f\|_p$. Sous les mêmes conditions, les moyennes de Cesàro d'ordre δ de f convergent vers f presque partout.*

Lorsque $\delta = 0$, ce résultat est dû à Gilbert [10]. Lorsque $\delta > \lambda$, il est conséquence du Lemme (6.3). Le résultat intermédiaire s'obtient par interpolation, de la même manière que le Corollaire (3.4).

Théorème (6.5). *Soit $\delta \geq 0$, $p > 1$. Si* $-(2\lambda + 1)/p + \sup(0, \lambda - \delta) < \alpha < (2\lambda + 1)/p' - \sup(0, \lambda - \delta)$ *il existe une constante $A_{p,\alpha}$ telle que, pour toute suite de fonctions $f_k \in L^p(dm_{2\lambda})$ et tout choix d'indices L_k,*

$$\left\|\left(\sum|S^{\delta}_{L_k}f_k|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\,\alpha}\leq A_{p\alpha}\left\|\left(\sum|f_k|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\,\alpha}.$$

Lorsque $\delta = 0$, ce résultat est dû à Muckenhoupt et Stein [17]. Lorsque $\delta > \lambda$, il résulte des Lemmes (6.1) et (6.3). Les cas intermédiaires sont obtenus en interpolant entre les espaces de fonctions

$$L^p_{\alpha_0}(dm_{2\lambda}) = \{f;\ f(\theta)\sin^{\alpha_0}\theta\in L^p(dm_{2\lambda})\},\qquad (-2\lambda+1)/p<\alpha_0<(2\lambda+1)/p',$$

et

$$L^p_{\alpha_1}(dm_{2\lambda}) = \{f;\ f(\theta)\sin^{\alpha_1}\theta\in L^p(dm_{2\lambda})\},\qquad (-2\lambda+1)/p+\lambda<\alpha_1<(2\lambda+1)/p'-\lambda,$$

par la méthode des familles analytiques d'opérateurs: on sait que, si $\delta > \lambda$,

$$\left\|\left(\sum|S^{\delta+iy}_{L_k}f_k|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\,\alpha_0}\leq A_{p\alpha_0}e^{cy^2}\left\|\left(\sum|f_k|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\,\alpha_0},$$

$$\left\|\left(\sum|S^{\delta+iy}_{L_k}f_k|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\,\alpha_1}\leq A_{p\alpha_1}e^{cy^2}\left\|\left(\sum|f_k|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\,\alpha_1}\qquad \text{si } \delta>0.$$

Il suffit alors d'utiliser le fait bien connu que l'interpolé $(L^p_{\alpha_0}(dm_{2\lambda}), L^p_{\alpha_1}(dm_{2\lambda}))_\theta$, au sens de Calderón, est $L^p_{\alpha_0\theta+\alpha_1(1-\theta)}(dm_{2\lambda})$.

Théorème (6.6). *Soit $p > 1$, k un entier supérieur ou égal à 1. Si la suite μ_n satisfait aux conditions*:

(A_0) $\sup|\mu_n| < M$,

(A_k) $\sup 2^{(k-1)n}\sum_{j=2^n}^{2^{n+1}}|\Delta^k\mu_j| < M$,

alors, il existe une constante $A_{p,\,\alpha}$, indépendante de μ_n telle que, pour toute fonction $\sum a_nP^\lambda_n(\cos\theta)\in L^p_\alpha(dm_{2\lambda})$, où:

$$-(2\lambda+1)/p+\sup(0,\lambda-k+1)<\alpha<(2\lambda+1)/p'-\sup(0,\lambda-k+1)$$

$$\left\|\sum\mu_na_nP^\lambda_n(\cos\theta)\right\|_{p,\,\alpha}\leq MA_{p,\,\alpha}\|f\|_{p,\,\alpha}.$$

Lorsque $k = 1$, ce théorème est dû à Muckenhoupt et Stein [17]. Lorsque $k \leq \lambda + 1$, il a été démontré par une méthode entièrement différente dans [2]. Dans tous les cas, c'est une conséquence des inégalités:

$$\|g(f)\|_{p,\,\alpha}\leq A_p\|f\|_{p,\,\alpha}\qquad \|f\|_{p,\,\alpha}\leq A_p(|a_0|+\|g(f)\|_{p,\,\alpha}),$$

où $g(f) = (\int_0^1(1-r)|\partial P_r(f)/\partial r|^2\,dr)^{1/2}$ et $P_rf(\theta) = \sum a_nr^nP^\lambda_n(\cos\theta)$, (voir [17]), du Théorème (6.5), et du Théorème (4.7), ou du moins de sa transposition dans le cadre des polynômes ultrasphériques.

7. **Généralisations diverses du théorème de multiplicateurs (4.9).** Nous avons déjà signalé dans l'introduction que la méthode utilisée au §4 se généralise à bien d'autres situations dès lors que l'on sait pour quelles valeurs de δ une inégalité du type:

$$\left\|\left(\sum|S^{\delta}_{n_k}f_k|^2\right)^{1/2}\right\|_p\leq A_p\left\|\left(\sum|f_k|^2\right)^{1/2}\right\|_p$$

est réalisée. C'est le cas, en particulier, non seulement pour les sphères, mais pour tous les espaces symétriques compacts de rang 1.

La liste exhaustive des espaces symétriques compacts de rang 1 est donnée dans [9]. Ce sont $\Sigma_n = SO(n+1)/SO(n)$, $P_n(\mathbf{R}) = SO(n+1)/O(n)$, $P_n(\mathbf{C}) = SU(l+1)/S(U(l) \times U(1))$ (avec $l = n/2 \geq 2$), $P_n(H) = Sp(l+1)/Sp(l) \times Sp(1)$ (avec $l = n/4 \geq 2$), $P_{16} = F_{4(-52)}/SO(9)$. Soit $M = G/K$ un de ces espaces, $\mathbf{1} = eK$ (e élément neutre de G). Les géodésiques ont toutes même longueur, que nous poserons égale à $2D$, et les fonctions zonales peuvent entre identifiées à des fonctions sur $[0, D]$. L'application exponentielle au pôle $\mathbf{1}$ permet de définir un système de coordonnées polaires sur M, (θ, u), avec $0 \leq \theta \leq D$ qui représente la distance à $\mathbf{1}$, et $u \in \Sigma_{n-1}$. La mesure invariante sur M est donnée par $\sin^p \lambda\theta \sin^q 2\lambda\theta \, d\theta \, du$, à une constante près, p, q et λ étant égaux à:

M	Σ_n	$P_n(\mathbf{R})$	$P_n(\mathbf{C})$	$P_n(H)$	P_{16}
p	0	0	$n-2$	$n-4$	8
q	$n-1$	$n-1$	1	3	7
λ	$\pi/2D$	$\pi/4D$	$\pi/2D$	$\pi/2D$	$\pi/2D$

Posons $\alpha = (p+q-1)/2$, $\beta = (q-1)/2$. L'opérateur de Laplace-Beltrami sur M admet pour valeurs propres $k(k+\alpha+\beta+1)$, où $k = 0, 1, 2, \cdots$ sauf lorsque $M = P_n(\mathbf{R})$, où les seules valeurs admises pour k sont $k = 0, 2, 4, \cdots$, et les fonctions propres zonales sont, à une constante près, $P_k^{\alpha,\beta}(\cos 2\lambda\theta)$.

Considérons tout d'abord le cas où M n'est pas $P_n(\mathbf{R})$. Appelons $\mathcal{H}_k$ le sous-espace propre relatif à la valeur propre $k(k+\alpha+\beta+1)$, $H_k f$ la projection de f sur $\mathcal{H}_k$. La moyenne de Cesàro $S_L^\delta f$ est définie par

$$S_L^\delta f = (A_L^\delta)^{-1} \sum_{l=0}^{L} A_{L-l}^\delta H_l f,$$

et, comme dans le cas de Σ_n, est donnée par la convolution avec la fonction zonale:

$$s_L^\delta\left(\cos \frac{\pi\theta}{D}\right) = (A_L^\delta)^{-1} \sum_{l=0}^{L} A_{L-l}^\delta \|P_l^{\alpha,\beta}\|_2^{-2} P_l^{\alpha,\beta}(1) P_l^{\alpha,\beta}\left(\cos \frac{\pi\theta}{D}\right).$$

Les majorations obtenues au §2:

$$|s_L^\delta(\cos\theta)| \leq A L^{2\alpha+2},$$

$$|s_L^\delta(\cos\theta)| \leq A L^{\alpha+1/2-\delta} |\theta|^{-\alpha-\delta-3/2}, \qquad \pi/L < \theta < \pi/2,$$

$$|s_L^\delta(\cos\theta)| \leq A L^{\alpha+\beta+1-\delta}, \qquad \pi/2 < \theta < \pi,$$

$$|s_L^\delta(\cos\theta)| \leq A L^{\alpha+1/2-\delta} |\pi-\theta|^{-1/2}, \qquad \pi/2 < \theta < \pi - \pi/L,$$

lorsque $\delta < \alpha + 3/2$, permettent, là encore, d'obtenir la majoration (pour $\delta > \alpha + 1/2$)(8):

$$\sup_L |S_L^\delta f| \leq AMf + K * |f|,$$

avec $K \in L^1(M)$. Les analogues du Théorème (3.6) et du Corollaire (3.7) s'en déduisent immédiatement.

D'autre part, l'intégrale de Poisson de f, $P_r f = \Sigma r^l H_l f$ est donnée, là encore, par la convolution avec le noyau de Poisson:

$$P_r\left(\cos\frac{\pi\theta}{D}\right) = \sum r^l \|P_l^{\alpha,\beta}\|_2^{-2} P_l^{\alpha,\beta}(1) P_l^{\alpha,\beta}\left(\cos\frac{\pi\theta}{D}\right).$$

Il résulte de [22] que P_r est positif, donc de norme 1 dans $L^1(M)$, et donc que P_r définit un semi-groupe satisfaisant aux propriétés requises pour l'existence d'inégalités L^p pour la fonction de Paley-Littlewood correspondante [19]: si $g(f) = (\int_0^1 (1-r)|\partial(P_r f)/\partial r|^2\, dr)^{1/2}$, $\|g(f)\|_p \leq A_p \|f\|_p$ et, si $H_0 f = 0$, $\|f\|_p \leq A_p \|g(f)\|_p$. On obtient ainsi l'analogue du théorème de multiplicateurs (4.9).

Considérons maintenant le cas où M est $P_n(\mathbf{R})$: H_k désignera le sous-espace propre relatif à la valeur propre $2k(2k + \alpha + \beta + 1)$, et plutôt que les moyennes de Cesàro, nous définirons:

$$\sigma_L^\delta f = (A_{2L}^\delta)^{-1} \sum_{l=0}^{L} A_{2L-2l}^\delta H_l f.$$

$\sigma_L^\delta f$ est donné par la convolution avec la fonction zonale:

$$\sigma_L^\delta\left(\cos\frac{\pi\theta}{2D}\right) = (A_{2L}^\delta)^{-1} \sum_{l=0}^{L} A_{2L-2l}^\delta \|P_{2l}^{\alpha,\beta}\|_2^{-2} P_{2l}^{\alpha,\beta}(1) P_l^{\alpha,\beta}\left(\cos\frac{\pi\theta}{2D}\right),$$

$$\sigma_L^\delta\left(\cos\frac{\pi\theta}{2D}\right) = \frac{1}{2}\left[s_{2L}^\delta\left(\cos\frac{\pi\theta}{2D}\right) + s_{2L}^\delta\left(\cos\left(\frac{\pi}{2D}(2D-\theta)\right)\right)\right],$$

d'où la majoration

$$\left|\sigma_L^\delta\left(\cos\frac{\pi\theta}{2D}\right)\right| \leq AL^{2\alpha+2},$$

$$\sigma_L^\delta\left(\cos\frac{\pi\theta}{2D}\right) \leq AL^{\alpha+1/2-\delta}|\theta|^{-\alpha-\delta-3/2}, \quad \frac{\pi\theta}{D} > \frac{\pi}{L}.$$

Donc $\sup_L |\sigma_L^\delta f| \leq AMf$ si $\delta > \alpha + 1/2$, et pour toutes suites f_k, L_k, et $p > 1$

$$\left\|\left(\sum |\sigma_{L_k}^\delta f_k|^2\right)^{1/2}\right\|_p \leq A_p \left\|\left(\sum |f_k|^2\right)^{1/2}\right\|_p$$

avec $\delta = \alpha + 1/2$.

De même, l'intégrale de Poisson de f est donnée par la convolution avec le noyau

(8) Remarquer que $\alpha + 1/2 = (n-1)/2$ où n est la dimension de M.

$$P_r\left(\cos\frac{\pi\theta}{2D}\right) = \sum r^l \|P_{2l}^{\alpha,\alpha}\|_2^{-2} P_{2l}^{\alpha,\alpha}(1) P_{2l}^{\alpha,\alpha}\left(\cos\frac{\pi\theta}{2L}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1-r}{(1-2\sqrt{r}\cos(\pi\theta/2D)+r)^{(\alpha+3)/2}} + \frac{1-r}{(1+2\sqrt{r}\cos(\pi\theta/2D)+r)^{(\alpha+3)/2}}\right)$$

qui est positif, uniformément de norme 1 dans $L^1(M)$. D'où les inégalités pour la fonction de Paley-Littlewood.

Le théorème de multiplicateurs de type (4.9) s'en déduit aisément, à condition d'avoir montré que les lemmes combinatoires (4.4), (4.5) et (4.8) sont encore vrais lorsque les moyennes de Cesàro $s_L^\delta = (A_L^\delta)^{-1}\sum_{l=0}^L A_{L-l}^\delta u_l$ sont remplacées par les moyennes $(A_{2L}^\delta)^{-1}\sum_{l=0}^L A_{2L-2l}^\delta u_l$. Mais il suffit de remarquer que cette dernière quantité peut être obtenue comme la demie sommes des moyennes de Cesàro des suites $u_0, u_1, u_1, \cdots, u_l, u_l, \cdots$, et $u_0, -u_1, u_1, \cdots, -u_l, u_l$. On peut finalement énoncer le théorème suivant:

Théorème (7.1). *Soit M un espace symétrique compact de rang 1 de dimension n. Il existe une constante A_p, pour tout $p > 1$, telle que quelle que soit la suite μ_j satisfaisant aux conditions*:

(A_0) $\sup|\mu_j| \leq M < \infty$,

(A_k) $\sup_j 2^{j(k-1)}\sum_{l=2^j}^{2^{j+1}} |\Delta^k \mu_l| \leq M < \infty$,

avec $k = (n+1)/2$ si n est impair, $k = (n+2)/2$ si n est pair, on ait l'inégalité

$$\left\|\sum \mu_j H_j f\right\|_p \leq A_p M \|f\|_p$$

pour toute fonction $f \in L^p(M)$.

Nous n'écrirons pas l'analogue de (4.9) (2) et de (4.10), qui sont tout aussi valables.(9)

Montrons enfin que la méthode s'applique encore dans le cas de variétés riemanniennes compactes. Soit donc $(\mathfrak{M}, g)$ une variété riemannienne de dimension n, Δ son Laplacien et $I = \int_0^{+\infty} dE_\lambda$ la résolution spectrale de l'identité associée. On peut, comme dans [19], définir une fonction de Littlewood-Paley à l'aide du noyau de la chaleur: on pose $T^t f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dE_\lambda f$, et $g(f) = (\int_0^{+\infty} t|\partial T^t f/\partial t|^2 dt)^{1/2}$; on a alors les inégalités $\|g(f)\|_p \leq A_p \|f\|_p$, et $\|f\|_p \leq \|g(f)\|_p$, cette dernière dès lors que $\int f = 0$ $(1 < p < +\infty)$. Nous utiliserons ici les sommes de Riesz qui sont définies comme suit:

$$S_R^\delta f = \int_0^R \left(1 - \frac{\lambda}{R}\right)^\delta dE_\lambda f.$$

Hörmander a démontré que si $\delta \geq n-1$, on a l'inégalité (voir [12], [13]) $\sup_R |S_R^\delta f| \leq C \cdot Mf$, où Mf est la fonction maximale au sens de Hardy-Littlewood, $Mf(x) = \sup_r (1/|B(x,r)|)\int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy$. Cette inégalité, jointe au résultat de

(9) On remarquera que les résultats de localisation qu'on peut, comme dans le cas de la sphère, déduire des inégalités obtenues dépendent fortement de l'espace symétrique choisi et non plus uniquement de sa dimension.

Fefferman-Stein permet alors d'obtenir "l'inégalité de Zygmund":

$$\left\|\left(\sum_i |S^{\delta}_{R_i} f_i(x)|^2\right)^{1/2}\right\|_p \leq A_p \left\|\left(\sum_i |f_i(x)|^2\right)^{1/2}\right\|_p \qquad (1 < p < +\infty).$$

On peut alors déduire de ce résultat un théorème de multiplicateurs, comme on l'a fait au §4.

Théorème (7.2). *Soit* $m(\lambda)$ *une fonction* n *fois dérivable sur* $[0, +\infty)$, *et satisfaisant aux conditions*:

(A_0) $\sup_\lambda |m(\lambda)| \leq M < +\infty$,

(A_n) $\sup_\Lambda (1/\Lambda)\int_0^\Lambda |\lambda^n (d/d\lambda)^n m(\lambda)|\, d\lambda \leq M < +\infty$,

alors

$$\left\|\int_0^{+\infty} m(\lambda)dE_\lambda f\right\|_p \leq C_p \cdot \|f\|_p.$$

La démonstration suit celle du Théorème (4.7), avec les variantes qu'impose le recours aux sommes de Riesz. On introduit d'abord la fonction de Littlewood-Paley $g_\delta(f) = (\int_0^{+\infty} |S_R^{\delta+1} f - S_R^\delta f|^2 dR/R)^{1/2}$. On montre comme précédemment que $g(f) \leq C \cdot g_\delta(f)$, puis, ici seulement pour δ entier que $g_\delta^*(f) = (\int_0^{+\infty} |S_R^{\delta+1} f - S_R^\delta f|^2 \nu(R) dR/R)^{1/2}$, où $\int_0^R \nu(r)dr \leq M \cdot R$, satisfait, lorsque $\delta \geq n-1$ l'inégalité $\|g_\delta^*(f)\|_p \leq C_p \|g(f)\|_p$. Pour ceci, nous avons besoin d'un résultat auxiliaire.

Lemme (7.3). *Soit* μ *une mesure sur* $[0, +\infty)$; *posons* $S_R^\delta = \int_0^R (1-\lambda/R)^\delta d\mu(\lambda)$ *et* $\sigma_R^\delta = \int_0^R (1-\lambda/R)^\delta e^{-t\lambda} d\mu(\lambda)$, *avec* $0 < t \leq 1/R$; *alors* $s_R^\delta = e^{Rt}\sigma_R^\delta + \int_0^R \sigma_\lambda^\delta A(\lambda, R)d\lambda$, *où* $A(\lambda, R) = O(t)$.

En effet,

$$s_R^\delta = \int_0^R (1-\lambda/R)^\delta e^{t\lambda} e^{-t\lambda} d\mu(\lambda) = e^{Rt}\int_0^R (1-\lambda/R)^\delta e^{-t\lambda} d\mu(\lambda)$$
$$+ e^{Rt}\int_0^R (1-\lambda/R)^\delta e^{-\lambda t}(e^{-t(R-\lambda)} - 1) d\mu(\lambda).$$

Mais

$$\int_0^R (1-\lambda/R)^\delta (e^{-t(R-\lambda)} - 1) \cdot e^{-\lambda t} d\mu(\lambda)$$
$$= -R^{-\delta}\int_0^R \frac{d}{d\lambda}\{(R-\lambda)^\delta (e^{-t(R-\lambda)} - 1)\}\left(\int_0^\lambda e^{-t\tau} d\mu(\tau)\right) d\lambda.$$

Intégrant à nouveau δ fois par parties, il vient

$$\int_0^R \left(1-\frac{\lambda}{R}\right)^\delta (e^{-t(R-\lambda)}-1)e^{-\lambda t}d\mu(\lambda)$$
$$= (-1)^{\delta+1}R^{-\delta}\int_0^R\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{\delta+1}\{(R-\lambda)^\delta e^{-t(R-\lambda)}-1\}\left(\int_0^\lambda(\lambda-\tau)^\delta e^{-t\tau}d\mu(\tau)\right)d\lambda$$
$$= (-1)^{\delta+1}\int_0^R\left(\frac{\lambda}{R}\right)^\delta\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{\delta+1}\{(R-\lambda)^\delta(e^{-t(R-\lambda)}-1\}\cdot\sigma_\lambda^\delta\cdot d\lambda.$$

Développant par la règle de Leibniz, on voit apparaître des termes

$$(\lambda/R)^\delta\cdot(R-\lambda)^{\delta-h}e^{-t(R-\lambda)}t^{\delta+1-h} = t\cdot e^{-t(R-\lambda)}((R-\lambda)\cdot t)^{\delta-h}\cdot(\lambda/R)^\delta \leq t.$$

D'où le lemme.

Venons à la démonstration du résultat sur la fonction g_δ^*: d'abord

$$S_R^{\delta+1}f - S_R^\delta f = -\frac{1}{R}\int_0^R\left(1-\frac{\lambda}{R}\right)^\delta\lambda dE_\lambda f;$$

notons ensuite $f_t = T^tf$; alors

$$S_R^{\delta+1}f_t - S_R^{\delta+1}f_t = -\frac{1}{R}\int_0^R\left(1-\frac{\lambda}{R}\right)^\delta\lambda e^{-\lambda t}dE_\lambda f.$$

Grâce au lemme, et à l'inégalité de Schwarz, on en déduit:

$$|S_R^{\delta+1}f - S_R^\delta f|^2 \leq A\left(|S_R^{\delta+1}f_t - S_R^\delta f_t|^2 + Rt^2\int_0^R|S_\lambda^{\delta+1}f_t - S_\lambda^\delta f_t|^2\,d\lambda\right),$$

dès lors que $t \leq 1/R$; raisonnant comme au §4, on peut toujours supposer que $R \leq \int_0^R\nu(r)\,dr \leq 2R$, de sorte qu'on choisira $1/t(R) = \int_0^R\nu(r)\,dr$; montrons d'abord que

$$\left\|\left(\int_0^{+\infty}|S_R^{\delta+1}f_{t(R)} - S_R^\delta f_{t(R)}|^2\nu(R)\frac{dR}{R}\right)^{1/2}\right\|_p \leq A_p\|g(f)\|_p,$$
$$S_R^{\delta+1}f_t - S_R^\delta f_t = (1/R)S_R^\delta\left(\frac{\partial}{\partial t}T^tf\right);$$

on utilise maintenant "l'inégalité de Zygmund" convenablement généralisée, d'où

$$\left\|\left(\int_0^{+\infty}|S_R^{\delta+1}f_{t(R)} - S_R^\delta f_{t(R)}|^2\nu(R)\frac{dR}{R}\right)^{1/2}\right\|_p$$
$$\leq A_p\left\|\left(\int_0^{+\infty}\frac{1}{R^2}\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}T^tf\right)_{t=t(R)}\right|^2\nu(R)\frac{dR}{R}\right)^{1/2}\right\|_p$$

Il ne reste plus qu'à faire le changement de variable $R \longrightarrow t = t(R)$ pour reconnaitre dans le second membre $\|g(f)\|_p$. Ensuite

$$\left\| \left(\int_0^{+\infty} R \cdot t(R)^2 \int_0^R |S_\lambda^{\delta+1} f_{t(R)} - S_\lambda^{\delta} f_{t(R)}|^2 d\lambda \cdot \nu(R) \frac{dR}{R} \right)^{1/2} \right\|_p$$

$$\leq A_p \left\| \left(\int_0^{+\infty} R t(R)^2 \cdot \int_0^R \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} T^t f \right)_{t=t(R)} \right|^2 \frac{d\lambda}{\lambda^2} \cdot \nu(R) \frac{dR}{R} \right)^{1/2} \right\|_p$$

$$\leq A_p \left\| \left(\int_0^{+\infty} R \cdot t(R)^2 \cdot \frac{1}{R} \frac{\nu(R)}{R} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} T^t f \right)_{t=t(R)} \right|^2 dR \right)^{1/2} \right\|_p .$$

On fait maintenant le changement de variable $R \longrightarrow t$, et on tient compte de ce que $t(R) \geq 1/R$; d'où encore la majoration par $\|g(f)\|_p$.

La suite de la démonstration est alors tout à fait similaire à celle du Théorème (4.7), l'analogue du Lemme (4.8) se démontrant comme le Lemme (7.3).

Remarque. L'inégalité démontrée par Hörmander admet effectivement $\delta = n-1$ pour indice critique (cf. le cas des sphères). Il serait intéressant de rechercher une inégalité analogue à celle du Théorème (3.1) dans le cas d'une variété compacte quelconque. Dans le cas des groupes de Lie compacts, la démonstration d'une telle inégalité fera l'objet d'une publication ultérieure de l'un des deux auteurs. Les travaux de N. Weiss [24] laissaient prévoir que le Théorème (7.2) pouvait être amélioré dans ce cas.

BIBLIOGRAPHIE

1. R. Askey and I. I. Hirschman, Jr., *Mean summability for ultraspherical polynomials*, Math. Scand. 12 (1963), 167–177. MR 29 #1497.

2. A. Bonami, *Multiplicateurs des séries ultrasphériques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B 273 (1971), A148–A150.

3. J.-L. Clerc, *Fonctions de Paley-Littlewood sur SU(2) attachées aux sommes de Riesz*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B 272 (1971), A1697–A1699. MR 43 #4962.

4. ———, *Les sommes partielles de la décomposition en harmoniques sphériques ne convergent pas dans L^p ($p \neq 2$)*, C. R. Acad. Sci. Paris 274 (1972), 59–61.

5. R. Coifman et G. Weiss, *Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogènes*, Lecture Notes in Math., no. 242, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1971.

6. C. Fefferman, *Inequalities for strongly singular convolution operators*, Acta Math. 124 (1970), 9–36. MR 41 #2468.

7. ———, *The multiplier problem for the ball*, Ann. of Math. (2) 94 (1971), 330–336.

8. C. Fefferman and E. Stein, *Some maximal inequalities*, Amer. J. Math. 93 (1971), 107–115.

9. R. Gangolli, *Positive definite kernels on homogeneous spaces and certain stochastic processes related to Lévy's Brownian motion of several parameters*, Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B 3 (1967), 121–226. MR 35 #6172.

10. J. Gilbert, *On convergence and maximal theorems for some orthogonal series*, Trans. Amer. Math. Soc. 145 (1969), 495–515.

11. S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*, Pure and Appl. Math., vol. 12, Academic Press, New York, 1962. MR 26 #2986.

12. L. Hörmander, *On the Riesz means of spectral functions and eigenfunction expansions for elliptic differential operators*, Some Recent Advances in the Basic Sciences, vol. 2 (Proc. Ann. Sci Conf. Belfer Grad. School Sci., Yeshiva Univ., New York, 1965/66), Belfer Graduate School of Science, Yeshiva Univ., New York, 1969, pp. 155–202. MR 41 #2239.

13. ———, *The spectral function of an elliptic operator*, Acta Math. 121 (1968), 193–218.

14. S. Igari and S. Kuratsubo, *A sufficient condition for L^p-multipliers*, Pacific J. Math. 38 (1971), 85–88.

15. E. Kogbetliantz, *Recherches sur la sommabilité des séries ultrasphériques par la méthode des moyennes arithmétiques*, J. Math. Pures Appl. 89 (1924), 107–187.

16. J. Marcinkiewicz, *Sur les multiplicateurs des séries de Fourier*, Studia Math. 8 (1939), 78–91.

17. B. Muckenhoupt and E. Stein, *Classical expansions and their relation to conjugate harmonic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 118 (1965), 17–92. MR 33 #7779.

18. E. Stein, *Localization and summability of multiple Fourier series*, Acta Math. 100 (1958), 93–147. MR 21 #4331.

19. ———, *Topics in harmonic analysis related to the Littlewood-Paley theory*, Ann. of Math. Studies, no. 63, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J.; Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1970, MR 40 #6176.

20. ———, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1971.

21. E. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1971.

22. G. Szegö, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1939. MR 1, 14.

23. N. Ja. Vilenkin, *Special functions and the theory of group representations*, "Nauka", Moscow, 1965; English transl., Transl. Math. Monographs, vol. 22, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1968; French transl., Monographies Universitaires de Mathématiques, no. 33, Dunod, Paris, 1969. MR 35 #420; MR 37 #5429; MR 39 #4467.

24. N. Weiss, *L^p-estimates for bi-invariant operators on compact Lie groups*, Amer. J. Math. (a paraitre).

25. A. Zygmund, *Trigonometric series*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, New York, 1959. MR 21 #6498.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF PARIS, CENTRE D'ORSAY, 91 ORSAY, FRANCE